

代 号 10701

学 号 1102121183

分类号 TN957

密 级 公开

题 (中、英文) 目 共形阵列误差校正及 DOA 估计方法研究

Research on Error Calibration and DOA Estimation

for Conformal Array

作 者 姓 名 张学敬 指导教师姓名、职务 杨志伟 副教授

学 科 门 类 工学 学科、专业 信号与信息处理

提交论文日期 二〇一四年三月

西安电子科技大学

学位论文独创性（或创新性）声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果；也不包含为获得西安电子科技大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

本人签名：_____

日期：_____

西安电子科技大学

关于论文使用授权的说明

本人完全了解西安电子科技大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属西安电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅和借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。同时本人保证，毕业后结合学位论文研究课题再撰写的文章一律署名单位为西安电子科技大学。

本人签名：_____

日期：_____

导师签名：_____

日期：_____

摘要

共形阵列在雷达、声呐、无线通信等领域有着广阔的应用前景，已成为阵列信号处理领域的热点和难点之一。本论文针对共形阵列波达角（Direction of Arrival, DOA）估计问题进行讨论，以共形阵列误差校正为主要研究内容，在共形阵列的导向矢量建模、幅相误差校正、互耦误差校正、快速 DOA 估计算法等关键技术进行了研究。主要工作包括：

(1) 研究了共形阵列的接收数据模型，针对共形阵列中各天线单元方向图存在差异的特点，建立了共形阵列导向矢量模型。

(2) 针对传统幅相误差校正算法应用于共形阵列时难以实时完成的问题，将虚拟内插变换方法应用于共形阵列的幅相误差校正中，提出了一种共形阵列快速幅相误差校正方法，将误差校正时间缩短了两个数量级。

(3) 针对共形阵列互耦模型复杂，难以实现互耦误差校正的问题，推导出了圆台共形阵列的互耦矩阵模型，并在此基础上提出两种互耦误差校正方法。所提算法具有较低的信噪比门限，可以实现圆台共形阵列存在互耦误差时的信源波达角估计。

(4) 研究了共形阵列的快速 DOA 估计算法，将虚拟内插变换方法引入到共形阵列中，建立了半球共形阵列到虚拟矩形阵列和虚拟十字阵列两种变换关系，并对两种方式在 DOA 估计、波束形成、运算复杂度等方面的性能进行了分析对比和仿真验证。

关键词：共形阵列 幅相误差校正 互耦误差校正 DOA 估计

目录

第一章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 共形阵列误差校正及 DOA 估计方法研究历史与现状	1
1.3 本文内容安排	8
第二章 共形阵列信号模型	9
2.1 引言	9
2.2 共形阵列接收数据模型	9
2.2.1 共形阵列导向矢量模型	9
2.2.2 共形阵列导向矢量建模方法	10
2.3 小结	12
第三章 阵列误差模型及校正算法	13
3.1 引言	13
3.2 阵列误差模型	13
3.2.1 位置误差	13
3.2.2 幅相误差	14
3.2.3 互耦误差	14
3.3 阵列误差影响及校正	15
3.3.1 阵列误差影响	15
3.3.2 位置误差校正	17
3.3.3 幅相误差校正	17
3.3.4 互耦误差校正	18
3.4 小结	20
第四章 共形阵列幅相误差校正	21
4.1 引言	21
4.2 基于虚拟内插的联合迭代自校正算法	21
4.2.1 幅相误差对虚拟内插变换的影响	21
4.2.2 幅相误差快速校正算法	23

4.2.3 运算复杂度分析.....	24
4.3 仿真实验.....	25
4.4 小结.....	27
第五章 共形阵列互耦误差校正	29
5.1 引言.....	29
5.2 圆台共形阵列互耦模型.....	29
5.3 互耦校正的数学基础.....	32
5.3.1 循环对称 Toeplitz 矩阵特性.....	33
5.3.2 循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵特性.....	34
5.4 圆台共形阵列互耦矩阵分解模型.....	35
5.5 互耦参数与 DOA 联合估计	37
5.6 解的存在性分析.....	39
5.7 仿真实验.....	40
5.8 小结.....	42
第六章 共形阵列快速 DOA 估计方法.....	43
6.1 引言.....	43
6.2 快速 DOA 估计方法	43
6.2.1 流形分离类方法.....	43
6.2.2 虚拟内插变换方法.....	45
6.3 半球阵列的两种内插方式.....	46
6.3.1 转换误差.....	47
6.3.2 等效孔径.....	47
6.3.3 运算复杂度分析.....	49
6.4 仿真实验.....	49
6.4.1 DOA 估计对比.....	50
6.4.2 自适应波束形成对比.....	51
6.5 小结.....	53
第七章 总结与展望	55
7.1 总结.....	55
7.2 工作展望.....	55

致谢.....	57
参考文献.....	59
作者在读期间的研究成果.....	67
附录 A.....	69
附录 B.....	73

第一章 绪论

1.1 研究背景及意义

近年来,随着现代战争环境的复杂化,对飞行器的气动性能以及散射面积也有了更高的要求。为了满足现代战争的要求,与飞行器共形的相控阵列应运而生,与常规均匀线阵相比,共形阵列^[1-5]具有优越的结构特点以及良好的测向性能,如其基本不会对雷达载体在空气动力学方面的性能产生影响,且具有轻便、灵活、安装简便等优点。另外,由于共形阵列的有效孔径较大,使其不需转动天线即可覆盖 360° 范围。共形阵列的优势使其广泛应用在现代雷达、无线通信等领域。

信源波达角(Direction of Arrival, DOA)估计在阵列信号处理中属于一个重要的研究方向。目前超分辨 DOA 估计方法通常可分为基于特征结构的子空间类方法(如 MUSIC^[6]方法和 ESPRIT^[7]方法)、加权子空间拟合(Weighted Subspace Fitting, WSF)类算法^[8]和基于最大似然(Maximum Likelihood, ML)原理^[9, 10]的算法。这些算法在 DOA 估计方面具有较高的分辨性能,但前提是阵列导向矢量需要精确已知。实际应用中,阵列不可避免地存在着各种误差,如阵列位置误差、阵列幅相误差以及阵列互耦误差等。误差的存在使得实际阵列流形偏离理想阵列流形,从而导致阵列高分辨 DOA 估计方法的性能恶化。所以,研究阵列误差校正及 DOA 估计方法具有重要的理论意义和实用价值。

共形相控阵雷达已成为雷达领域的热点研究方向。共形阵列天线附着于载体表面的特点,使得其易受空气动力的影响而发生实时形变,同时共形阵列特殊的结构特性使得阵列的幅相误差和互耦误差模型较为复杂,导致共形阵列无法应用传统的误差校正方法来校正误差。另外,由于共形阵列通常阵元数较多,且阵列呈 3 维分布,传统 DOA 估计方法如谱峰搜索或多维参数寻优等,应用于共形阵列时通常运算量极大,不易于实时实现。因此研究共形阵列下的误差校正及快速 DOA 估计方法是共形阵列信号处理的关键。

1.2 共形阵列误差校正及 DOA 估计方法研究历史与现状

伴随着阵列信号处理理论的发展,共形阵列以其优越的性能而得到世界各国的广泛关注。下面从已有的典型共形阵列系统、共形阵列误差校正方法和共形阵列波达角估计方法三个方面描述共形阵列的研究历史与现状。

1、典型系统

共形阵列天线可安装于导弹、舰艇、卫星等载体表面,且相比传统线阵或面

阵而言共形阵列具有独特的优势。这使得共形阵列的研究得到了世界各国的高度重视，在过去的二三十年间，共形阵列产品相继出现^[11]。

以色列艾尔塔（ELTA）公司于 20 世纪 90 年代成功研制 L 波段准共形固态预警机系统“费尔康”（PHALCON, Phased Array L-band Conformal Radar）。该系统轻便、造价低、可靠性高，具有跟踪和监视地/海面运动目标的能力。“费尔康”预警机采用全新的“环”式设计，甩掉了机身的雷达天线罩，并将 6 面全固态相控阵雷达安装在机身两旁以及机尾和机鼻上。以色列已将“费尔康”系统安装在波音 707 和海湾 550 飞机上，并相继投入使用。



图 1.1 以色列“费尔康”预警机

美国海军曾雇佣格鲁曼公司来开发机翼共形阵列，其研究成果可用在将来的反电子对抗中。其天线单元选用“八木”型，测试显示，该共形阵列可实现半圆空域内的干扰搜索与对消。此外，系统通过将有源相控阵安装于机翼前缘，以此完成对雷达系统的实验调试，同时用自适应处理手段来抵御机身变形和机翼抖动产生的影响。另外，1997 年 5 月，格鲁曼公司在美国航空航天局的 F/A-18 飞机上



图 1.2 格鲁曼公司在 F/A-18 飞机上安装灵巧蒙皮天线

试飞了 VHF“Endcap”型灵巧蒙皮天线。新型天线采用具有高传导特性的热固性核心复合材料，从而使得其表面电流大大增强，且具有低损耗的特点。通过将天线安装在顶部鳍状结构的 F/A-18 右垂直尾翼上，并进行模拟试验。飞行试验表明，

天线材料足以抵御飞机的双尾抖振载荷，相比于 F/A-18 标准天线，其通信能力为原来的 5 倍。

美国国防高级研究计划局 (DARPA) 于 2005 年推出了 ISIS (Integrated Sensor is Structure) [12] 项目，旨在设计一种传感器飞艇，且其上装备有双波段有源相控阵雷达。其中，雷声公司负责研制一个由近 600 万个阵元组成的形如橄榄球场的阵列。该有源电扫阵列具有大孔径、双波段的特点，其中 X 波段天线间距网格为 0.5 英尺，UHF 天线对应参数为几英尺。通过将该阵列共形于飞艇上，同时从约 7 万英尺的高空发射 UHF 信号及 X 波段信号，可以实现无线通信、远程监视以及对高精度微小目标的探测，且作用距离可达 400 英里。

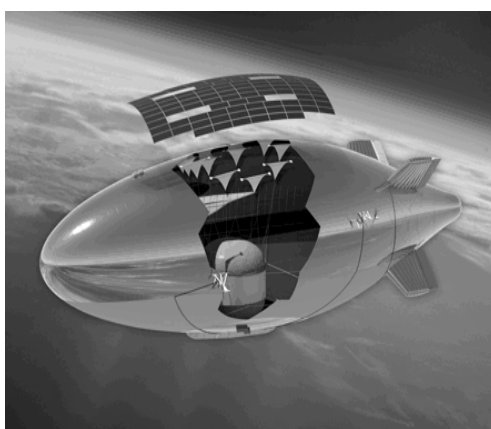


图 1.3 美国雷声公司研制的军用飞艇

德国应用技术研究所 (FGAN) 研制成功了 ERAKO [13] (Electronic Radar with Conformal Array Antenna) 天线。该天线呈 U 型柱面分布，天线孔径划分为 30 个线性阵列，每个阵列由 4 层水平极化微带天线阵元组成，中心频率为 9.4GHz。ERAKO 主要用途为目标检测、跟踪、识别以及 SAR 成像。

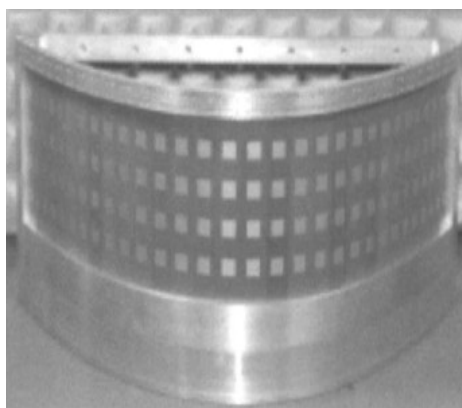


图 1.4 德国 FGAN 公司的 ERAKO 阵列

英国的马诺尔研究公司 (Roke Manor Research) 将多面体共形阵列应用于飞机与卫星的通讯系统中 [14]，从而实现了超高频 (SHF) 波段下飞机和卫星之间的通讯。该多面体共形阵列由 40 个三角面组成，每一个三角面分布 6 个自适应交叉偶

极子单元。系统采用右旋圆极化天线接收，用左旋圆极化天线接收。水平可覆盖 360° 的范围，俯仰角覆盖的范围从 0° 到 62.3° ，增益超过 20dB 。

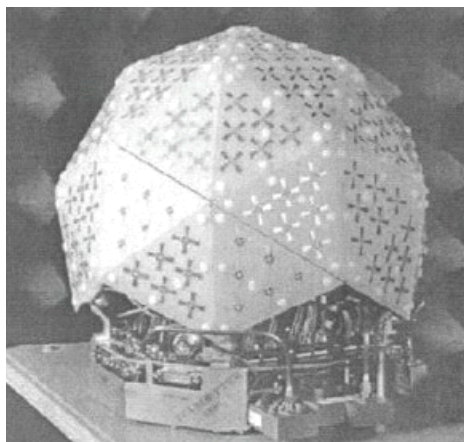


图 1.5 英国马诺尔研究公司的多面体共形阵列

21 世纪初，俄罗斯将共形声呐阵列应用于“拉达”级潜艇 667 上，这是共形阵列在潜艇上的首次应用。该系统前端表面大部分由声呐阵覆盖，可以实现警戒监测、定位跟踪、全方位探测和攻击，且可对 4 个或更多目标进行跟踪。应用共形阵列后，使得系统主动探测敌方舰艇的距离大于 60 公里，而相应的被动探测距离约为 20 公里，同时具有高达 100 公里的低频检测范围。使该潜艇有快速发现对方目标的能力，并且使己方有充足的时间来采取对策。

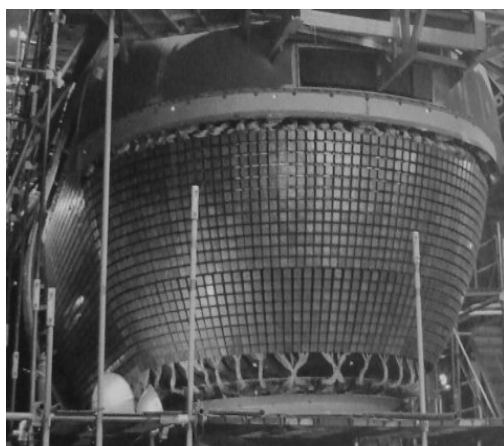


图 1.6 俄罗斯“拉达”级潜艇的共形声呐阵列

我国有关共形阵列的研究起步于上世纪 80 年代，90 年代起，逐步实现了共形样机的生产研制。进入 21 世纪后，我国在共形阵天线方面进行了大量研究。2012 年的珠海航展上，CS/RB1 雷达第一次公开展示。该圆柱形相控阵雷达工作于 L 波段，由中国兵器装备集团公司生产，可实现 360° 探测，作为拦截和反击火力武器系统的警戒与跟踪雷达，可用于校正己方迫击炮的射击。且由于其独有的特点，CS/RB1 雷达在要地防空与探测、火力作战、炮弹阵地定位等方面非常适合。CS/RB1 雷达的出现，意味着我国共形相控阵技术的研究步伐已经走出实验室，

继而向更广阔的的国际市场迈进。

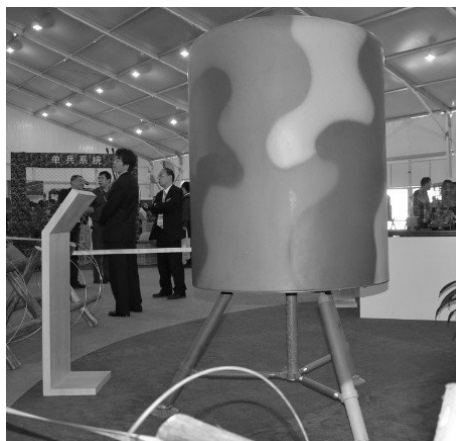


图 1.7 中国 CS/RB1 轻型警戒雷达

另外,在 90 年代中期,日本开发出具有半球共形状^[15]的微带天线阵;E Vouch 等人对利用圆锥面共形阵列实现低轨道卫星的数据传输进行了研究^[16]; Wang 等人设计了一种头盔型共形阵列^[17],可以将人员移动以及多径效应带来的干扰进行有效抑制。

2、共形阵列误差校正方法

为了将实际阵列系统的优良性能充分发挥,误差校正通常是不可或缺的。针对传统的等距线阵、等距圆阵、等距面阵,阵列误差校正算法已经逐渐成熟,正在应用到实际工程方面。然而,由于共形阵列处理技术仍处于发展之中,已公开的共形阵列误差校正方面的文献则相对较少。

第一类误差校正方法利用子空间之间的正交原理来构造代价函数。Weiss A J 和 Friedlander B 通过在信源方位与阵列误差参数之间联合迭代,实现了阵列幅相误差^[18]、位置误差^[19]和互耦误差^[20]的校正(WF 算法)。Soon V C 等对 WF 算法中误差参数与 DOA 估计之间的唯一性关系进行了分析^[21]。文献[22]将阵列互耦误差矩阵与幅相误差矩阵的乘积综合为一个误差矩阵,在校正源精确已知的基础上利用子空间原理校正阵列互耦误差和幅相误差。文献[23]提出一种混合算法,将等距圆阵的降秩算法和 Root-MUSIC^[24]算法相结合,由此实现存在互耦误差时的等距圆阵 2 维波达角估计。Zhongfu Y 基于信号子空间的广义特征向量性质提出一种等距线阵下的互耦误差校正方法^[25],该方法不需要迭代运算和谱峰搜索过程,无需校正源即可实现等距线阵的互耦校正。Aifei L 和 Shenghong C 分别提出基于数据点乘^[26]和数据协方差矩阵点乘^[27]的幅相误差校正算法,两种算法通过点乘运算来构造新协方差矩阵,利用谱峰搜索实现阵列存在幅相误差时的 DOA 估计,且估计性能不依赖于幅相误差的大小,但算法运算量大,不易实现。文献[28-30]充分利用阵列互耦矩阵的数学特性,实现了对 DOA 和阵列互耦参数的解耦合。

第二类误差校正方法利用最大似然的基本原理构造代价函数。文献[31]通过

对阵列位置误差模型进行近似, 利用最大似然原理实现了存在微小位置扰动时的阵列误差校正。文献[32, 33]基于最大似然原理结合牛顿迭代算法实现了阵列位置误差、幅相误差和互耦误差的有源校正。See C M S^[34]基于最大似然原理的框架提出一种参数化阵列误差校正方法, 可以准确地实现导向矢量扰动较大时的误差参数估计。文献[35]基于最大似然原理, 并综合利用校正源的空域和时域波形信息, 最终实现了阵列互耦误差和幅相误差的校正。

第三类误差校正方法利用信号子空间拟合原理和噪声子空间拟合原理来构造代价函数。文献[36]利用高斯-牛顿迭代算法实现了存在幅相误差和位置误差时的任意结构阵列下的 DOA 估计。文献[37]在校正源方位精确已知的情况下, 利用加权子空间拟合原理和牛顿迭代方法对阵列位置误差进行校正。

上述三类阵列误差校正方法均假设阵列误差为常量, 但在实际中, 误差参数可以是服从某种分布的随机变量^[38]。文献[39]在假设阵列流形误差满足高斯分布的前提下, 基于最大后验概率 (Maximum A Posteriori, MAP) 准则和加权子空间拟合原理, 通过构造不同的代价函数, 提出一系列稳健的误差校正与信源波达角估计方法, 包括 MAP 方法、MAP-WSF 方法、MAPprox 方法、MAP-NSF^[40]方法和 GWSF 方法等。

近年来, 一些学者开始考虑在阵列误差校正中应用智能优化算法。如文献[41]和文献[42]分别利用遗传算法 (Genetic Algorithm, GA) 和粒子群优化 (Particle Swarm Optimization, PSO) 算法对阵元真实位置进行优化逼近来实现阵列位置误差校正。文献[43]和文献[44]分别将遗传算法应用于阵列互耦误差和阵列幅相误差校正中。

另外, 还有一些阵列误差校正算法, 如文献[45, 46]将阵列实际导向矢量建模为幅度矩阵与相位矩阵的乘积, 在假设幅度矩阵固定的前提下, 利用数据的二阶统计特性实现了导向矢量的盲校正; 文献[47]提出一种 TAM (Toeplitz Approximation Method) 方法, 利用矩形阵列协方差矩阵的 Toeplitz 特性实现存在位置误差时的 2 维 DOA 估计; 文献[48]利用高阶统计量实现了阵列存在幅相误差时的 DOA 估计, 且该方法可以应用于信号呈非高斯分布的情况; 文献[49]基于 Khatri-Rao 积建立代价函数, 通过交替最小化过程实现了等距线阵下互耦参数的估计; 文献[50-52]利用辅助阵元法来对阵列误差参数进行求解; 文献[53]将辅助阵元法应用于累量域, 从而实现了 DOA 与阵列位置误差参数的联合估计; 文献[54]通过拟合信源导向矢量的绝对相位值, 来实现对阵元位置误差的校正; 文献[55]通过分析振动状态下的共形阵列数学模型, 利用对时变导向矢量进行修正的方式, 实现了振动状态下的共形阵列时变位置误差校正。

3、共形阵列波达角估计方法

在共形阵列的 DOA 估计方面, 研究者们做了大量工作, 并取得多项成果。

Friedlander B 利用虚拟内插变换实现了对任意阵的 DOA 估计^[56, 57]。在此基础上, 虚拟内插变换方法作为预处理技术应用到任意阵列解相干处理^[58]以及典型非等距线阵的 DOA 估计^[59]中。

Fabio B 等提出流形分离技术 (Manifold Separation Technique, MST)^[60, 61], 该技术将任意阵列的导向矢量表示成采样矩阵与具有 Vander monde 结构的基矢量的乘积, 利用基矢量的特殊结构来实现任意阵列的快速 DOA 估计。在此基础上, 文献[62]利用傅里叶基和调和函数基两种方式实现了阵列流形的 2 维分离。文献[63]利用 2 维流形分离实现了 3 维阵列的 DOA 估计, 但计算量较大。Costa M 利用导向矢量的 2 维傅里叶基分解性质, 并结合 Root-MUSIC 与子空间拟合方法, 实现了任意阵列下的 DOA 与极化特性联合估计^[64]。

文献[65]提出一种傅里叶域的 Root-MUSIC 算法, 作为传统 Root-MUSIC 方法的扩展形式, 该算法可以应用于任意阵列结构中, 但由于需要进行线性搜索, 运算量较大。文献[66]在此基础上提出一种快速 Root-MUSIC 算法, 将求根多项式看做洛朗级数展开形式, 使得运算过程得到简化。

另外, 国内外学者针对特殊结构的共形阵列提出了一些 DOA 估计算法。Griffiths H D^[67]利用模式空间算法实现了均匀圆阵的空间谱估计, Zoltoski M D 在此基础上研究了利用模式空间变换的 ESPRIT 算法^[68, 69], 并将 Root-MUSIC 算法应用于模式空间变换中^[70, 71]。齐子森等人着重研究了锥面共形阵列^[72, 73], 通过在子阵上分别利用 ESPRIT 算法, 并对不同轴向的 DOA 估计进行解耦合, 来获得最终的 DOA 估计, 所提方法在入射电磁波的极化信息未知时同样适用。

此外, 学者们在共形阵列的空时自适应处理 (Space-Time Adaptive Processing, STAP)^[74, 75]和方向图综合方面也取得了一些研究成果。如 Zatman 针对圆阵机载雷达的 STAP 技术应用进行了详细论述^[76]; Hersey 对共形阵列机载雷达的杂波建模问题进行了深入研究, 并提出一系列杂波非均匀补偿算法^[77, 78]; Rices 指出共形阵列杂波特性的分析应考虑从多维空间频率进行^[79-81]; 段克清在此基础上, 通过在三维空间频域和多普勒域进行联合相位补偿^[82], 有效地解决了共形机载雷达的非平稳杂波抑制问题。在共形阵列方向图综合方面, F Zhao 利用预处理交替投影方法实现了共形阵列的低旁瓣、快收敛方向图综合^[83]; K Yang 通过对共形阵列阵元位置进行优化来实现低旁瓣方向图综合^[84]; Yanying B 将粒子群优化算法应用到了共形阵列方向图的综合中^[85]; Mianquan L^[86]将极化和空域方向图综合建模为凸优化问题, 通过数值分析方法实现了任意阵列下具有极化控制能力的方向图综合。

1.3 本文内容安排

本文在共形阵列误差校正和快速 DOA 估计方法方面进行了研究。在误差校正方面，提出了一种借助虚拟阵列来快速实现共形阵列幅相误差校正的新方法。另外针对圆台共形阵列，推导出了其互耦矩阵模型，并提出了两种基于圆台共形阵列的互耦误差自校正方法。在 DOA 估计方面，将虚拟内插变换方法应用到共形阵列上，并对半球共形阵列的两种内插方式进行了性能对比分析。

论文的具体内容安排如下：

- (1) 第一章是绪论，在对共形阵列的优势以及应用前景方面进行介绍的同时，对共形阵列误差校正及 DOA 估计方法的研究历史及现状进行综述。
- (2) 第二章指出共形阵列相对于传统阵列的不同，在介绍共形阵列接收信号模型的基础上，利用坐标旋转实现了共形阵列导向矢量建模。
- (3) 第三章介绍阵列误差模型，包括阵列位置误差、阵列幅相误差和阵列互耦误差，对已有的阵列误差校正算法进行阐述。
- (4) 第四章将虚拟内插变换方法应用到共形阵列误差校正中，提出共形阵列幅相误差校正快速算法。
- (5) 第五章针对圆台共形阵列，在互耦矩阵呈复共轭对称分布的前提下推导出其互耦矩阵模型，并利用两种模式对互耦矩阵进行分解，提出两种基于圆台共形阵列的互耦误差自校正模型。
- (6) 第六章介绍共形阵列的快速 DOA 估计算法，将虚拟内插变换方法引入到共形阵列中。分别建立了从半球共形阵列到虚拟矩形阵列和虚拟十字阵列的两种变换关系，对比研究了虚拟矩形阵列和虚拟十字阵列在 DOA 估计、自适应波束形成和运算复杂度等方面的性能。
- (7) 第七章对全文工作进行了总结和展望。

第二章 共形阵列信号模型

2.1 引言

与常规均匀线阵相比，共形阵列可减小空气阻力，同时增大有效发射孔径，可提供较窄的波束和宽角度扫描。共形阵列的优势使其在雷达、移动通信、无线电测向等方面有着广泛的应用前景。

本章分析了共形阵列的接收数据模型，在此基础上利用坐标旋转实现了共形阵列导向矢量的建模。本章为后续研究共形阵列误差校正及 DOA 估计方法提供理论基础。

2.2 共形阵列接收数据模型

2.2.1 共形阵列导向矢量模型

对于包含 N 个阵元的任意几何结构阵列，建立正交直角坐标系 $O-XYZ$ ，如图 2.1 所示。假设在阵列远场 (θ_m, φ_m) ($m=1, 2, \dots, M$) 处有 M 个窄带点源以平面波入射（波长为 λ ），其中 θ_m 为空间信源的方位角， φ_m 为空间信源的俯仰角。阵列接收快拍数据可由式(2-1)表示为：

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m) s_m(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{A}(\theta, \varphi) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2-1)$$

式中， $\mathbf{x}(t)$ 为 $N \times 1$ 快拍数据矢量， $\mathbf{s}(t)$ 为 $M \times 1$ 信号复幅度矢量， $s_m(t)$ 为 $\mathbf{s}(t)$ 的第 m 个元素， $\mathbf{n}(t)$ 为 $N \times 1$ 阵列噪声矢量。

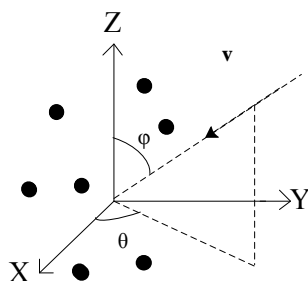


图 2.1 任意几何结构阵列模型

阵列导向矢量矩阵 $\mathbf{A}(\theta, \varphi)$ 可表示为如式(2-2)：

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1, \varphi_1), \mathbf{a}(\theta_2, \varphi_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_M, \varphi_M)] \quad (2-2)$$

其中, $\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)$ 为第 i 个信源的导向矢量, 考虑到共形阵列载体曲率和单元方向图指向的差异, 以及遮挡效应的影响, $\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)$ 可由式(2-3)表示为:

$$\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i) = [g_1(\theta_i, \varphi_i) \exp(jk\mathbf{r}_1^T \mathbf{v}_i), \dots, g_N(\theta_i, \varphi_i) \exp(jk\mathbf{r}_N^T \mathbf{v}_i)]^T \quad (2-3)$$

其中, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, 其大小表示单位波长的周期数, $\mathbf{r}_n = [x_n, y_n, z_n]^T$ 为第 n 个阵元的坐标矢量 ($n=1, 2, \dots, N$), $\mathbf{v}_i = [\sin \varphi_i \cos \theta_i, \sin \varphi_i \sin \theta_i, \cos \varphi_i]^T$ 为第 i 个信源的空间方向矢量, $(\cdot)^T$ 为转置操作。 $g_j(\theta_i, \varphi_i)$ ($j=1, 2, \dots, N$) 为第 j 个阵元在阵列全局坐标系 (θ_i, φ_i) 处的单元方向图^[87]。

在传统阵列的导向矢量建模中, 通常认为各阵元的单元方向图保持一致, 因此通常将式(2-3)中的 $g_j(\theta_i, \varphi_i)$ 归一化为 1, 通常称之为“全向阵列”。但在共形阵列中, 由于受到载体曲率以及遮挡效应的影响, 各阵元的单元方向图指向存在差异, 因此需要对每个阵元的单元方向图进行准确的数学建模。

2.2.2 共形阵列导向矢量建模方法

增益 $g_j(\theta_i, \varphi_i)$ 与传输波的极化状态以及接收天线阵元的极化特性 (即极化方向图) 有关, 而极化方向图通常以阵元本地局部坐标系为参考。若设第 j 个阵元的局部极化方向图为 $\tilde{\mathbf{g}}_j(\tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i)$, 则 $\tilde{\mathbf{g}}_j(\tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i)$ 可表示为:

$$\tilde{\mathbf{g}}_j(\tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i) = f_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i) \mathbf{e}_{\tilde{\theta}} + f_{\tilde{\varphi}}(\tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i) \mathbf{e}_{\tilde{\varphi}} \quad (2-4)$$

式中 $(\tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i)$ 为第 i 个信源在局部坐标系下的方位角和俯仰角, $f_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i)$, $f_{\tilde{\varphi}}(\tilde{\theta}_i, \tilde{\varphi}_i)$ 分别代表极化方向图在 $\mathbf{e}_{\tilde{\theta}}$, $\mathbf{e}_{\tilde{\varphi}}$ 方向的分量, $\mathbf{e}_{\tilde{\theta}}$ 和 $\mathbf{e}_{\tilde{\varphi}}$ 为局部坐标系下的极化坐标轴, 分别对应方位角方向的单位矢量和俯仰角方向的单位矢量, 如图 2.2 所示。

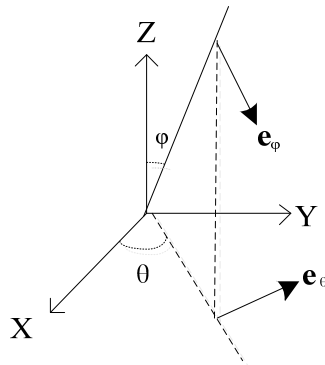


图 2.2 极化坐标轴示意图

增益 $g_j(\theta, \varphi)$ 可表示为^[88]:

$$g_j(\theta_i, \varphi_i) = \mathbf{g}_j(\theta_i, \varphi_i) \mathbf{q}(\theta_i, \varphi_i) \quad (2-5)$$

其中 $\mathbf{g}_j(\theta_i, \varphi_i)$ 为第 j 个阵元在全局坐标系下的极化方向图, $\mathbf{q}(\theta_i, \varphi_i)$ 为传输波在全

局坐标系下的电场矢量。两者分别表示为：

$$\mathbf{g}_j(\theta_i, \varphi_i) = F_\theta(\theta_i, \varphi_i) \mathbf{e}_\theta + F_\varphi(\theta_i, \varphi_i) \mathbf{e}_\varphi \quad (2-6)$$

$$\mathbf{q}(\theta_i, \varphi_i) = q_\theta(\theta_i, \varphi_i) \mathbf{e}_\theta + q_\varphi(\theta_i, \varphi_i) \mathbf{e}_\varphi \quad (2-7)$$

由此可以看出，考虑全局坐标系下方位为 (θ, φ) 的信号，若其极化状态确定，则 $\mathbf{q}(\theta, \varphi)$ 可直接确定，为了求增益 $g_j(\theta, \varphi)$ ，需要将局部极化方向图 $\tilde{\mathbf{g}}_j(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ 转换为全局极化方向图 $\mathbf{g}_j(\theta, \varphi)$ ，从而实现阵列流形的建模。

文献[89]利用三次欧拉旋转来实现局部极化方向图向全局极化方向图的旋转，步骤如下：

步骤 1: $(\theta, \varphi) \rightarrow (X, Y, Z)$ ，将来波方向的全局极坐标转换为全局坐标系下的直角坐标；

步骤 2: $(X, Y, Z) \rightarrow (x, y, z)$ ，依次对第 $j(j=1, 2, \dots, N)$ 个阵元建立局部直角坐标系 O_j -xyz，由其与全局坐标系的相对关系，求出全局坐标系向局部坐标系旋转时分别绕 X 、 Y 、 Z 轴旋转的俯仰角、航向角和横滚角，由欧拉角来构造三个欧拉矩阵，进而利用欧拉旋转矩阵 \mathbf{R}_{euler} 完成由全局直角坐标系向局部直角坐标系的坐标转换；

步骤 3: $(x, y, z) \rightarrow (\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ ，利用局部直角坐标系与局部极坐标系的关系完成由局部直角坐标向局部极坐标的转换；

步骤 4: $(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) \rightarrow [f_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}), f_{\tilde{\varphi}}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})]$ ，由局部极坐标值计算出极化方向图的分量 $\mathbf{e}_{\tilde{\theta}}$ 和 $\mathbf{e}_{\tilde{\varphi}}$ 分量；

步骤 5: 依次将第 $j(j=1, 2, \dots, N)$ 个阵元的局部极化基向量 $\mathbf{e}_{\tilde{\theta}}$ 和 $\mathbf{e}_{\tilde{\varphi}}$ 用其局部直角坐标基向量 \mathbf{e}_{x_j} 、 \mathbf{e}_{y_j} 、 \mathbf{e}_{z_j} 表示：

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\tilde{\theta}} = -\sin \tilde{\theta} \mathbf{e}_{x_j} + \cos \tilde{\theta} \mathbf{e}_{y_j} \\ \mathbf{e}_{\tilde{\varphi}} = \cos \tilde{\varphi} \cos \tilde{\theta} \mathbf{e}_{x_j} + \cos \tilde{\varphi} \sin \tilde{\theta} \mathbf{e}_{y_j} - \sin \tilde{\varphi} \mathbf{e}_{z_j} \end{cases} \quad (2-8)$$

步骤 6: 依次求出第 $j(j=1, 2, \dots, N)$ 个阵元的极化方向图在各自局部直角坐标系下的分量 $f_{x_j}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ 、 $f_{y_j}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ 、 $f_{z_j}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ ，进而得到第 j 个阵元的极化方向图在局部直角坐标系下的坐标表示：

$$\tilde{\mathbf{g}}_j(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) = f_{x_j}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) \mathbf{e}_{x_j} + f_{y_j}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) \mathbf{e}_{y_j} + f_{z_j}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) \mathbf{e}_{z_j} \quad (2-9)$$

步骤 7: 利用 \mathbf{R}_{euler}^{-1} 求出 $f_{x_j}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ 、 $f_{y_j}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ 、 $f_{z_j}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ 在全局直角坐标系下对应的分量 $F_{x_j}(\theta, \varphi)$ 、 $F_{y_j}(\theta, \varphi)$ 、 $F_{z_j}(\theta, \varphi)$ ；

步骤 8: 根据步骤 5 中两种直角坐标基向量与极坐标基向量之间的关系求出向量 $[F_{x_j}(\theta, \varphi), F_{y_j}(\theta, \varphi), F_{z_j}(\theta, \varphi)]^T$ 在全局极坐标基向量 \mathbf{e}_θ 下的分量 $F_{\theta_j}(\theta, \varphi)$ 和

在 \mathbf{e}_φ 下的分量 $F_{\varphi_j}(\theta, \varphi)$ 。

综上所述可以看出，经过步骤 1-8，即可将局部极化方向图转换为全局坐标下的极化方向图，进而可以完成共形阵列导向矢量的建模。

2.3 小结

本章首先研究了共形阵列的接收数据模型，针对共形阵列的特点，指出共形阵列与传统阵列在导向矢量建模方面存在差异，并对导向矢量差异的机理进行了说明。在此基础上，本章利用坐标旋转实现了共形阵列导向矢量的建模，为后续的共形阵列误差校正及 DOA 估计提供了理论基础。

第三章 阵列误差模型及校正算法

3.1 引言

在实际工程应用中，阵列不可避免地存在着各种误差，误差的存在使得实际阵列流形与理想阵列流形存在偏差，从而导致阵列高分辨技术的性能显著下降。因此误差校正在阵列信号处理领域具有重要的理论意义和应用价值。

本章首先对三种常见的误差模型（位置误差、幅相误差、互耦误差）进行建模分析，在此基础上介绍了不同误差下的阵列误差校正方法。本章为后续共形阵列的误差校正方法提供理论基础。

3.2 阵列误差模型

本章主要针对三种误差模型进行建模分析，包括位置误差、幅相误差和互耦误差。

3.2.1 位置误差

理想情况下，我们假设阵列中各阵元的相对位置精确已知，由此可以得到理想的阵列模型。但是实际中阵列会受到各种内外条件的影响，如工作温湿度、飞行器载体的抖动、阵列的形变等，最终导致实际的阵元位置偏离于理想的阵元位置，这种阵元位置上的偏离称之为阵列位置误差。

设 N 元阵列，理想情况下第 n ($n=1,2,\dots,N$) 个阵元的空间位置坐标为 $\mathbf{r}_n=[x_n, y_n, z_n]^T$ ，实际坐标为 $\tilde{\mathbf{r}}_n=[\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{z}_n]^T$ ，满足 $\tilde{\mathbf{r}}_n=\mathbf{r}_n+\Delta\mathbf{r}_n$ ，其中 $\Delta\mathbf{r}_n$ 为第 n 个阵元的位置坐标误差，表示为 $\Delta\mathbf{r}_n=[\Delta x_n, \Delta y_n, \Delta z_n]^T$ 。

位置误差建模中通常以第 1 个阵元为参考建立坐标系，此时 $\Delta\mathbf{r}_1=\mathbf{0}$ 。对于 (θ, φ) 方向的信号，由 $\Delta\mathbf{r}_n$ 而导致的信号到达第 n 个阵元的时延差可表示为：

$$\Delta\tau_n=\frac{1}{c}\Delta\mathbf{r}_n^T\mathbf{v} \quad (3-1)$$

其中， c 为信号的传播速度， $\mathbf{v}=[\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi]^T$ 。由此得到 (θ, φ) 方向引入的导向矢量误差为：

$$\Delta\mathbf{a}(\theta, \varphi)=[1, \exp(j2\pi f\Delta\tau_2), \dots, \exp(j2\pi f\Delta\tau_N)]^T \quad (3-2)$$

其中， f 为载频，同时可以看出，位置误差具有方位依赖性。实际导向矢量 $\mathbf{a}_r(\theta, \varphi)$

可以表示为:

$$\mathbf{a}_r(\theta, \varphi) = \Delta \mathbf{a}(\theta, \varphi) \odot \mathbf{a}(\theta, \varphi) \quad (3-3)$$

其中 \odot 表示 Hadamard 积操作。

此时, 输出模型式(2-1)可修正为式(3-4):

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{\Gamma}' \odot \mathbf{A}] \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (3-4)$$

其中, $\mathbf{\Gamma}' = [\Delta \mathbf{a}(\theta_1, \varphi_1), \Delta \mathbf{a}(\theta_2, \varphi_2), \dots, \Delta \mathbf{a}(\theta_M, \varphi_M)]$ 。

3.2.2 幅相误差

对于阵列系统, 收发通道中包含多个有源器件, 各器件特性由于受到工作环境、生产条件、使用时间等内外因素的影响, 最终使得阵列各阵元之间的幅相特性存在差异。此类误差称为幅相误差, 通常认为其具有方位无关性。对于 (θ, φ) 方位的信源, 当考虑阵列幅相误差时, 其实际阵列的导向矢量 $\mathbf{a}_r(\theta, \varphi)$ 表示为:

$$\mathbf{a}_r(\theta, \varphi) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{a}(\theta, \varphi) \quad (3-5)$$

其中 $\mathbf{\Gamma}$ 为幅相误差对角矩阵, 表示为:

$$\mathbf{\Gamma} = \text{diag}([\rho_1 \exp(j\beta_1), \rho_2 \exp(j\beta_2), \dots, \rho_N \exp(j\beta_N)]^T) \quad (3-6)$$

其中 ρ_n 为第 n 个阵元的幅度误差, β_n 为第 n 个阵元的相位误差, 幅相误差建模中通常以第 1 个阵元为参考 ($\rho_1 = 1, \beta_1 = 0$), 即假设第 1 个阵元不存在误差。

存在幅相误差时, 阵列输出模型式(2-1)可修正为式(3-7):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{A}(\theta, \varphi) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (3-7)$$

3.2.3 互耦误差

理想的阵列模型中, 通常假设阵列中各阵元工作独立, 不会相互干扰。实际中, 特别当各阵元间距较小时, 阵元不可避免地受到其它阵元辐射的影响, 同时阵列接收的辐射场会改变天线阵元原有的电流分布, 这种阵元间的互耦效应在工程应用中已被证实是真实存在的。对于 (θ, φ) 方位的信源, 当考虑互耦误差时, 实际阵列导向矢量 $\mathbf{a}_r(\theta, \varphi)$ 可表示为:

$$\mathbf{a}_r(\theta, \varphi) = \mathbf{Z} \mathbf{a}(\theta, \varphi) \quad (3-8)$$

其中 \mathbf{Z} 为互耦矩阵, 通常为一复矩阵。当考虑某些特殊结构阵列, 其互耦矩阵通常可由特定结构矩阵来近似。同幅相误差矩阵一样, 互耦矩阵通常认为不具有方

位依赖性。

存在互耦误差时，阵列输出模型式(2-1)可修正为式(3-9)：

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{ZAs}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (3-9)$$

3.3 阵列误差影响及校正

上节对三种阵列误差模型进行了建模分析，本节将在阵列误差模型的基础上，分析阵列误差对阵列信号处理的影响，并介绍各种阵列误差下的经典校正方法。

3.3.1 阵列误差影响

以 MUSIC^[6]算法为代表的子空间类 DOA 估计方法能够实现超分辨信号参数估计，在实际工程中广泛应用。但该类算法要求阵列导向矢量精确已知，当阵列存在各种误差时，子空间类测向算法的性能显著下降。由上一节可知，阵列位置误差、互耦误差均可等价于方位依赖的幅相误差，因此，下面从阵列幅度误差和阵列相位误差两方面来分析误差对 MUSIC 算法的影响。

(1) 幅度误差对 MUSIC 算法的影响

当阵列中各阵元只存在幅度误差时，阵列实际导向矢量可表示为：

$$\mathbf{a}_r(\theta, \varphi) = \mathbf{Ga}(\theta, \varphi) \quad (3-10)$$

其中 \mathbf{G} 为幅度误差矩阵，满足：

$$\mathbf{G} = \text{diag}([\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N]^T) \quad (3-11)$$

一般取 $\rho_1 = 1$ 。考虑单信源情况，来波方位设为 (θ_0, φ_0) ，阵列协方差矩阵可表示为：

$$\mathbf{R}_r = \mathbf{GR}_i\mathbf{G}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (3-12)$$

对 \mathbf{R}_r 进行特征值分解，得到最大的特征值 λ_{max} 及其对应的特征向量 \mathbf{e}_{max} 。由子空间原理， \mathbf{e}_{max} 可表示为：

$$\mathbf{e}_{max} = \frac{\mathbf{Ga}(\theta_0, \varphi_0)}{\|\mathbf{G}\|_F} \quad (3-13)$$

设阵列实际噪声子空间为 \mathbf{U}_{nr} ，利用理想导向矢量进行谱峰搜索，得到的空间谱曲线 $P_{MUSIC}(\theta, \varphi)$ 可表示为：

$$\begin{aligned}
P_{MUSIC}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\|\mathbf{a}^H(\theta, \varphi)\mathbf{U}_{nr}\|^2} \\
&= \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta, \varphi)\mathbf{a}(\theta, \varphi) - \mathbf{a}^H(\theta, \varphi)\mathbf{e}_{max}\mathbf{e}_{max}^H\mathbf{a}(\theta, \varphi)} \quad (3-14) \\
&= \frac{\sum_{n=1}^N \rho_i^2}{N \cdot \sum_{n=1}^N \rho_i^2 - |\mathbf{a}^H(\theta, \varphi)\mathbf{G}\mathbf{a}(\theta, \varphi)|^2}
\end{aligned}$$

由上式可以看出, 当 $(\theta, \varphi) = (\theta_0, \varphi_0)$ 时, $P_{MUSIC}(\theta_0, \varphi_0)$ 取得最大值, 但此时峰值不会趋于无穷大。因此阵列幅度误差的存在只影响谱峰的幅度, 而不会使谱峰位置发生偏移, 即不影响 DOA 估计的精度, 且该结论在多源情况下依然适用。

(2) 相位误差对 MUSIC 算法的影响

当阵列中各阵元只存在相位误差时, 阵列实际导向矢量可表示为:

$$\mathbf{a}_r(\theta, \varphi) = \Phi \mathbf{a}(\theta, \varphi) \quad (3-15)$$

其中 Φ 为相位误差矩阵, 满足:

$$\Phi = \text{diag}\left([\exp(j\beta_1), \exp(j\beta_2), \dots, \exp(j\beta_N)]^T\right) \quad (3-16)$$

通常取 $\beta_1 = 0$ 。阵列实际协方差矩阵可表示为:

$$\mathbf{R}_r = \Phi \mathbf{R}_i \Phi^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3-17)$$

利用理想导向矢量进行谱峰搜索, 得到空间谱曲线 $P_{MUSIC}(\theta, \varphi)$ 可表示为:

$$\begin{aligned}
P_{MUSIC}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\|\mathbf{a}^H(\theta, \varphi)\mathbf{U}_{nr}\|^2} \\
&= \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta, \varphi)\mathbf{a}(\theta, \varphi) - \mathbf{a}^H(\theta, \varphi)\mathbf{e}_{max}\mathbf{e}_{max}^H\mathbf{a}(\theta, \varphi)} \quad (3-18) \\
&= \frac{1}{N - |\mathbf{a}^H(\theta, \varphi)\Phi\mathbf{a}(\theta, \varphi)|^2}
\end{aligned}$$

由上式可以看出, 当 $(\theta, \varphi) = (\theta_0, \varphi_0)$ 时, $P_{MUSIC}(\theta_0, \varphi_0) = \frac{1}{N - \left|\sum_{i=1}^N \exp(j\beta_i)\right|^2}$ 。

可见, 由于存在相位失配, $P_{MUSIC}(\theta_0, \varphi_0)$ 不一定取得最大值, 因此相位误差的存在会使得谱峰位置发生偏移, 导致 DOA 估计存在偏差。

3.3.2 位置误差校正

有源校正方法

3 维阵列存在位置误差时, 可以通过设置 3 个或 3 个以上方位已知的校正源来对阵元位置进行校正。

假设 M ($M \geq 3$) 个校正源的方位分别为 $(\theta_1, \varphi_1), (\theta_2, \varphi_2), \dots, (\theta_M, \varphi_M)$, 分别将第 m 个校正源分时作用于阵列, 得到第 m 个校正源的阵列协方差矩阵:

$$\mathbf{R}_m = \sigma_s^2 \mathbf{a}_r(\theta_m, \varphi_m) \mathbf{a}_r^H(\theta_m, \varphi_m) + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3-19)$$

对 \mathbf{R}_m 进行特征分解, 由子空间理论可得:

$$\mathbf{a}_r(\theta_m, \varphi_m) = k_m \mathbf{e}_m \quad (3-20)$$

其中, \mathbf{e}_m 为 \mathbf{R}_m 最大特征值对应的特征向量, k_m 为未知复常数, 满足 $k_m [\mathbf{e}_m]_1 = 1$ 。

将 M 个校正信源得到的方程联立, 得到:

$$k \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1^T \\ \Delta \mathbf{r}_2^T \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{r}_M^T \end{bmatrix} = \Psi \quad (3-21)$$

其中 $\Psi = \arg \left\{ [k_1 \mathbf{e}_1, \dots, k_M \mathbf{e}_M] \cdot / [\mathbf{a}(\theta_1, \varphi_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_M, \varphi_M)] \right\}^T$ 。由此得到位置误差的最小二乘估计为:

$$[\Delta \hat{\mathbf{r}}_1, \Delta \hat{\mathbf{r}}_2, \dots, \Delta \hat{\mathbf{r}}_M] = \frac{1}{k} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_M^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_M \end{bmatrix} \Psi \quad (3-22)$$

有源校正算法利用最小二乘法来估计位置误差参数, 在校正源方位精确已知的情况下能实现对误差参数的最佳逼近, 从而使得校正性能较优。但在实际应用中, 校正源方位难免存在偏差, 有源校正算法性能会变差, 所以不利于工程应用。

3.3.3 幅相误差校正

联合迭代自校正算法

Weiss A J 和 Friedlander B 两位学者基于实际导向矢量与实际噪声子空间相互正交的原理提出了经典的联合迭代自校正算法^[18](WF 算法), 该算法利用式(3-23)建立代价函数, 结合幅相误差矩阵的对角特性来对公式进行等价变形, 最终利用

循环迭代来实现阵列幅相误差的优化估计。

$$\{\hat{\Gamma}, (\hat{\theta}, \hat{\varphi})\} = \arg \min_{\Gamma, (\theta, \varphi)} \sum_{m=1}^M \mathbf{a}^H(\theta_m, \varphi_m) \Gamma^H \mathbf{U}_{nr} \mathbf{U}_{nr}^H \Gamma \mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m) \quad (3-23)$$

利用矩阵等式 $\Gamma \mathbf{a}(\theta, \varphi) = \text{diag}[\mathbf{a}(\theta, \varphi)] \text{vec}(\Gamma) \triangleq \mathbf{D}(\theta, \varphi) \boldsymbol{\delta}$ ，同时令 $\mathbf{Q}(\theta, \varphi) = \sum_{m=1}^M \mathbf{D}^H(\theta_m, \varphi_m) \mathbf{U}_{nr} \mathbf{U}_{nr}^H \mathbf{D}(\theta_m, \varphi_m)$ ，则式(3-23)可以变形为式(3-24)：

$$\{\hat{\Gamma}, (\hat{\theta}, \hat{\varphi})\} = \arg \min_{\Gamma, (\theta, \varphi)} \boldsymbol{\delta}^H \mathbf{Q}(\theta, \varphi) \boldsymbol{\delta} \quad (3-24)$$

由此得到 WF 算法具体流程如下。

步骤 1：初始化 $l=0$ ，令 $\hat{\Gamma}^l = \Gamma_0$ ，其中 Γ_0 为阵列幅相误差矩阵初始值或由经验得到的先验值；

步骤 2：利用 $\hat{\Gamma}^l$ 对理想导向矢量进行修正，同时计算空间谱 $P_{MUSIC}(\theta, \varphi)$ ：

$$P_{MUSIC}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\|\mathbf{U}_{nr}^H \hat{\Gamma}^l \mathbf{a}(\theta, \varphi)\|^2} \quad (3-25)$$

通过搜索空间谱得到第 l 次迭代的 M 个信源方位估计值 $(\theta_m^l, \varphi_m^l) (m=1, 2, \dots, M)$ ；

步骤 3：令 $\mathbf{w} = [1, 0, \dots, 0]^T$ ，由信源方向的估计值 $(\theta_m^l, \varphi_m^l)$ 得到阵列误差参数的估计值：

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{l+1} = \frac{\mathbf{Q}^{-1}(\hat{\theta}^l, \hat{\varphi}^l) \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{Q}^{-1}(\hat{\theta}^l, \hat{\varphi}^l) \mathbf{w}}, \hat{\Gamma}^{l+1} = \text{diag}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{l+1}) \quad (3-26)$$

步骤 4：判断是否收敛，若收敛则停止，否则 $l=l+1$ ，并跳转至步骤 2，继续迭代，收敛条件为： $J^{(l-1)} - J^{(l)} \leq \varepsilon$ ，其中 $J^{(l)} = (\hat{\boldsymbol{\delta}}^{l+1})^H \mathbf{Q}^{-1}(\hat{\theta}^l, \hat{\varphi}^l) (\hat{\boldsymbol{\delta}}^{l+1})$ 。

由于 WF 算法通过在 DOA 与误差参数之间进行迭代来实现两者的联合估计，所以使得该算法的幅相误差校正性能依赖于 DOA 的精度。当阵列的幅相误差较小时，DOA 估计的初始精度较高，从而与之对应的幅相误差校正性能也较为准确；而当幅相误差较大时，DOA 估计的初始估计精度较差，使得该算法可能收敛于某局部点而无法获得全局的最优解，最终使得 DOA 与误差参数的估计均偏离真实值较大。这正是自校正 WF 算法的缺点。

3.3.4 互耦误差校正

CMS 互耦误差校正

当阵列存在互耦时，阵列实际导向矢量可表示为：

$$\mathbf{a}_r(\theta, \varphi) = \mathbf{Z} \mathbf{a}(\theta, \varphi) \quad (3-27)$$

由子空间基本原理可知：当信源数为 1 时，实际导向矢量 $\mathbf{a}_r(\theta, \varphi)$ 满足 $\mathbf{a}_r(\theta, \varphi) = c\mathbf{e}_{max}$ ，其中 \mathbf{e}_{max} 为阵列协方差矩阵的最大特征值对应的特征向量， c 为未知复常数。

设有 M 个校正源分时作用于阵列，则有下面表达式成立^[22]：

$$\mathbf{Z}, \Lambda = \arg \min_{\mathbf{Z}, \Lambda} \|\mathbf{Z}\mathbf{A} - \mathbf{E}\Lambda\|^2 \quad (3-28)$$

其中 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1, \varphi_1), \mathbf{a}(\theta_2, \varphi_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_M, \varphi_M)]$ ， $\Lambda = \text{diag}(\mathbf{c})$ ， $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_M]^T$ ， c_m 为第 m 个校正源对应的复常数。 \mathbf{E} 为特征向量矩阵，可表示为：

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_{max}(\theta_1, \varphi_1), \mathbf{e}_{max}(\theta_2, \varphi_2), \dots, \mathbf{e}_{max}(\theta_M, \varphi_M)] \quad (3-29)$$

由此可得互耦矩阵的估计：

$$\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{E}\Lambda\mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1} \quad (3-30)$$

设 $\mathbf{P} = \mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1}\mathbf{A}$ ， $\mathbf{P}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1}\mathbf{A}$ ，将 $\hat{\mathbf{Z}}$ 代入 $\|\mathbf{Z}\mathbf{A} - \mathbf{E}\Lambda\|^2$ 中，结合矩阵性质 $\|\mathbf{B}\|_F = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})}$ ，得到对角矩阵 Λ 的估计：

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} &= \arg \min_{\Lambda} \|\mathbf{E}\Lambda\mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{E}\Lambda\|_F \\ &= \arg \min_{\Lambda} \|\mathbf{E}\Lambda[\mathbf{P} - \mathbf{I}]\|_F \\ &= \arg \min_{\Lambda} \text{tr}[(\mathbf{P} - \mathbf{I})^H \mathbf{A}^H \mathbf{E}^H \mathbf{E} \Lambda (\mathbf{P} - \mathbf{I})] \\ &= \arg \min_{\Lambda} \left\{ \text{tr}[(\mathbf{P} - \mathbf{I})^H \mathbf{A}^H \mathbf{E}^H \mathbf{E} \Lambda \mathbf{P}] - \text{tr}[(\mathbf{P} - \mathbf{I})^H \mathbf{A}^H \mathbf{E}^H \mathbf{E} \Lambda] \right\} \\ &= \arg \min_{\Lambda} \left\{ \text{tr}[(\mathbf{P} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^H \mathbf{E}^H \mathbf{E} \Lambda \mathbf{P}] - \text{tr}[(\mathbf{P} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^H \mathbf{E}^H \mathbf{E} \Lambda] \right\} \\ &= \arg \min_{\Lambda} \left\{ \text{tr}[\mathbf{A}^H \mathbf{E}^H \mathbf{E} \Lambda (\mathbf{P} - \mathbf{I}) \mathbf{P}] + \text{tr}[\mathbf{A}^H \mathbf{E}^H \mathbf{E} \Lambda (\mathbf{I} - \mathbf{P})] \right\} \\ &= \arg \min_{\Lambda} \text{tr}[\mathbf{A}^H \mathbf{E}^H \mathbf{E} \Lambda \mathbf{P}^\perp] \\ &= \arg \min_{\mathbf{c}} \left\{ \mathbf{c}^H \left[(\mathbf{E}^H \mathbf{E}) \odot (\mathbf{P}^\perp)^T \right] \mathbf{c} \right\} \end{aligned} \quad (3-31)$$

由上可知，对矩阵 $\left[(\mathbf{E}^H \mathbf{E}) \odot (\mathbf{P}^\perp)^T \right]$ 进行特征值分解，取其最小的特征值对应的特征向量 \mathbf{c}_{min} ，即可得到对角矩阵 Λ 的估计：

$$\hat{\Lambda} = \text{diag}(\mathbf{c}_{min}) \quad (3-32)$$

进而由式(3-30)得到最终的互耦矩阵估计值。

设 N 元阵列，所需校正源的个数为 M ，由此可得 MN 个数据。待估计的变量数为 $N^2 + M$ ，要实现互耦校正， M 、 N 之间应满足： $N^2 + M < MN$ 即 $M > \frac{N^2}{N-1}$ 。

CMS 互耦误差校正算法要求校正源方位精确已知，且所需校正源较多。另外，即使校正源数目足够多，校正源方位选取不恰当也会使得算法的性能恶化。

3.4 小结

本章对三种常见的误差模型（位置误差、幅相误差、互耦误差）进行了建模分析，并介绍了不同误差下的阵列误差校正方法。本章可为后续共形阵列的误差校正方法提供理论基础。

第四章 共形阵列幅相误差校正

4.1 引言

阵列幅相误差在实际工程应用中普遍存在，以子空间原理为基础的 WF 算法可以实时完成幅相误差参数与 DOA 的联合估计。但由于该算法需要对信源方位进行估计，当采用共形阵列时，快速 DOA 估计算法无法直接应用，而 2 维谱峰搜索运算量大，难以快速完成，从而限制了该算法在共形阵列上的应用。

本章在深入分析 WF 算法的基础上，将虚拟内插变换法引入到共形阵列的幅相误差校正中。算法通过调整虚拟阵列变换矩阵，实现了对虚拟子空间的修正，利用修正后的虚拟子空间之间的正交关系实现对信源方位的 DOA 估计，并由此得到原共形阵列的幅相误差参数。该算法无需谱峰搜索，具有较低的运算复杂度，可以快速高效地完成共形阵列幅相误差和信源方位的联合估计。

4.2 基于虚拟内插的联合迭代自校正算法

4.2.1 幅相误差对虚拟内插变换的影响

由于共形阵列布阵的特殊性，导致其阵列流形不具有 Vander monde 结构，使得快速子空间类算法（如 Root-MUSIC 等）不能直接应用于共形阵列，从而限制了其在工程上的应用。虚拟内插变换可以将非线性共形阵列转换为虚拟的线性阵列，利用虚拟线性阵列的特殊结构即可实现快速 DOA 估计。这里首先介绍虚拟阵列变换法^[22]，其核心是寻找在某个角域 Θ_l 内满足 $\mathbf{B}_l^H \mathbf{a}(\theta) = \bar{\mathbf{a}}(\theta)$ ($\theta \in \Theta_l$) 的变换矩阵 \mathbf{B}_l ，其中 $\mathbf{a}(\theta)$ 和 $\bar{\mathbf{a}}(\theta)$ 分别表示真实阵列和虚拟阵列的导向矢量。通常要求 $\bar{\mathbf{a}}(\theta)$ 具有 Vander monde 结构。由 $\mathbf{B}_l^H \mathbf{A}_l = \bar{\mathbf{A}}_l$ 可以解得：

$$\mathbf{B}_l = (\mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H)^{-1} \mathbf{A}_l \bar{\mathbf{A}}_l^H \quad (4-1)$$

式中， \mathbf{A}_l 、 $\bar{\mathbf{A}}_l$ 分别为测试角度集 $[\theta_l^{(1)}, \theta_l^{(1)} + \Delta\theta, \theta_l^{(1)} + 2\Delta\theta, \dots, \theta_l^{(2)} - \Delta\theta, \theta_l^{(2)}]$ 的真实阵列导向矢量和虚拟阵列导向矢量，二者分别满足 $\mathbf{A}_l = [\mathbf{a}(\theta_l^{(1)}), \mathbf{a}(\theta_l^{(1)} + \Delta\theta), \dots, \mathbf{a}(\theta_l^{(2)})]$ ， $\bar{\mathbf{A}}_l = [\bar{\mathbf{a}}(\theta_l^{(1)}), \bar{\mathbf{a}}(\theta_l^{(1)} + \Delta\theta), \dots, \bar{\mathbf{a}}(\theta_l^{(2)})]$ 。

记原阵列数据协方差矩阵为 $\mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}$ （其中 $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{S}(t) \mathbf{S}^H(t)]$ 为信号包络的自协方差矩阵），则虚拟阵列数据协方差矩阵为 $\bar{\mathbf{R}}_l = \mathbf{B}_l^H \mathbf{R} \mathbf{B}_l = \bar{\mathbf{A}}_l \mathbf{R}_s \bar{\mathbf{A}}_l^H + \sigma^2 \mathbf{B}_l^H \mathbf{B}_l$ 。由于 $\mathbf{B}_l^H \mathbf{B}_l \neq \mathbf{I}$ ，此时虚拟阵列的信号子空间与

噪声子空间不正交，所以通常需要进行预白化处理，变换矩阵变为：

$$\mathbf{T}_l = (\mathbf{B}_l^H \mathbf{B}_l)^{-1/2} \mathbf{B}_l^H \quad (4-2)$$

此时 $\mathbf{T}_l \mathbf{T}_l^H = \mathbf{I}$ 成立，真实阵列流形与虚拟阵列流形之间的关系变为：

$$\mathbf{T}_l \mathbf{A}(\theta) = (\mathbf{B}_l^H \mathbf{B}_l)^{-1/2} \mathbf{B}_l^H \mathbf{A}(\theta) = (\mathbf{B}_l^H \mathbf{B}_l)^{-1/2} \bar{\mathbf{A}}(\theta) = \bar{\mathbf{A}}'(\theta) \quad (\theta \in \Theta_l) \quad (4-3)$$

虚拟阵列的数据协方差矩阵表示为：

$$\bar{\mathbf{R}}_l = \mathbf{T}_l \mathbf{R} \mathbf{T}_l^H = \bar{\mathbf{A}}' \mathbf{R}_s \bar{\mathbf{A}}'^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (4-4)$$

若设原阵列噪声子空间为 \mathbf{U}_n ，则虚拟阵列噪声子空间可表示为：

$$\bar{\mathbf{U}}_n = \mathbf{T}_l \mathbf{U}_n \quad (4-5)$$

容易看出，经过预白化处理后的虚拟阵列导向矢量 $\bar{\mathbf{A}}'(\theta)$ 已不具有 Vandermonde 结构，然而由于 $\mathbf{T}_l \mathbf{U}_n$ 与 $(\mathbf{B}_l^H \mathbf{B}_l)^{-1/2} \bar{\mathbf{A}}(\theta)$ 相互正交，且 $\bar{\mathbf{A}}(\theta)$ 具有 Vandermonde 结构，由此仍然可以根据 Root-MUSIC 算法构造求根多项式，进而实现快速 DOA 估计。

不失一般性，下面将感兴趣的观测空间固定于第 l 个角域，设该角域的理想变换矩阵和理想预白化变换矩阵分别为 \mathbf{B}_l 和 \mathbf{T}_l ，即令 $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_l$ ， $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_l$ ，同时设该角域内仅存在 1 个信源，信源方位为 (θ_0, φ_0) 。设 \mathbf{A}_l ， $\bar{\mathbf{A}}_l$ 分别为理想情况下原阵列和虚拟阵列的导向矢量矩阵，下面分别从原阵列不存在幅相误差和存在幅相误差两个方面对阵列子空间的正交关系进行分析。

当原阵列不存在幅相误差时， \mathbf{T}_l 将理想的接收数据 \mathbf{x}_i 转换为理想的虚拟数据 $\bar{\mathbf{x}}_i$ ，表示为：

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{T}_l [\mathbf{A}_l \mathbf{s} + \mathbf{n}] = (\mathbf{B}_l^H \mathbf{B}_l)^{-1/2} \mathbf{B}_l^H [\mathbf{A}_l \mathbf{s} + \mathbf{n}] = (\mathbf{B}_l^H \mathbf{B}_l)^{-1/2} \bar{\mathbf{A}}_l \mathbf{s} + \bar{\mathbf{n}} \quad (4-6)$$

由 $\bar{\mathbf{x}}_i$ 可得到理想的虚拟信号子空间和理想的虚拟噪声子空间，利用两者之间的正交关系，结合虚拟阵列的特殊结构，即可快速准确地实现信源 DOA 估计。

当原阵列存在幅相误差时，原阵列的实际接收数据 \mathbf{x}_r 可表示为式(4-7)：

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{s} + \mathbf{n}_r = \mathbf{\Gamma} \mathbf{A}_l \mathbf{s} + \mathbf{n}_r \quad (4-7)$$

用理想的变换矩阵 \mathbf{B}_l 和理想的预白化变换矩阵 \mathbf{T}_l 进行变换，会得到带有误差的虚拟阵列数据 $\bar{\mathbf{x}}_e$ ，表示为式(4-8)：

$$\bar{\mathbf{x}}_e = \mathbf{T}_l [\mathbf{\Gamma} \mathbf{A}_l \mathbf{s} + \mathbf{n}_r] = \bar{\mathbf{A}}_e \mathbf{s} + \bar{\mathbf{n}}_e \quad (4-8)$$

由 $\bar{\mathbf{x}}_e$ 可得到实际的虚拟信号子空间 $\bar{\mathbf{U}}_{sr}$ 和实际的虚拟噪声子空间 $\bar{\mathbf{U}}_{nr}$ ，虽然 $\bar{\mathbf{U}}_{sr}$ 与 $\bar{\mathbf{U}}_{nr}$ 相互正交，但是由于 \mathbf{B}_l 、 \mathbf{T}_l 与原阵列结构间存在失配，导致变换后的虚拟阵列数据存在响应误差，且该误差的特性与原阵列相比而言可能发生改变。如果不能够补偿虚拟阵列的响应误差，基于虚拟阵列的信源波达角估计方法将失效。

当存在阵列误差时，理想变换矩阵相对真实阵列流形的失配使得虚拟阵列不能反映信号的空域信息。这种失配可以认为是由原阵列的幅相误差造成的，也可以认为是由变换矩阵的选取不当造成的。从第二个角度出发，得到实际需要的变换矩阵 \mathbf{B}_0 应该根据实际原阵列流形来设计，即 \mathbf{B}_0 满足 $\mathbf{B}_0^H (\Gamma \mathbf{A}_i) = \bar{\mathbf{A}}_i$ ，解得：

$$\mathbf{B}_0 = \left[(\Gamma \mathbf{A}_i)^H \right]^\# \bar{\mathbf{A}}_i^H = \left[(\Gamma \mathbf{A}_i) (\Gamma \mathbf{A}_i)^H \right]^{-1} (\Gamma \mathbf{A}_i) \bar{\mathbf{A}}_i^H = (\Gamma^H)^{-1} \mathbf{B}_i \quad (4-9)$$

其中 $(\bullet)^\#$ 表示求矩阵的广义逆操作。

由式(4-2)得到实际需要的预白化变换矩阵 \mathbf{T}_0 ，利用 \mathbf{T}_0 得到实际需要的虚拟阵列数据 $\bar{\mathbf{x}}_0$ 如式(4-10)：

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{T}_0 [\Gamma \mathbf{A}_i \mathbf{s} + \mathbf{n}_r] = (\mathbf{B}_0^H \mathbf{B}_0)^{-1/2} \bar{\mathbf{A}}_i \mathbf{s} + \bar{\mathbf{n}}_0 = \bar{\mathbf{A}}_0 \mathbf{s} + \bar{\mathbf{n}}_0 \quad (4-10)$$

此时的 $\bar{\mathbf{x}}_0$ 能够真实地反映信号空域信息，可以准确实现 DOA 估计。下面对变换矩阵失配时虚拟阵列的误差特性进行分析，即考察 $\bar{\mathbf{A}}_e$ 与 $\bar{\mathbf{A}}_0$ 之间的相互关系。

通过上述分析可知， $\bar{\mathbf{A}}_e = \mathbf{T}_i \Gamma \mathbf{A}_i$ ， $\bar{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{T}_0 \Gamma \mathbf{A}_i$ ，且 $\mathbf{T}_0^H \mathbf{T}_0 = \mathbf{I}$ ，由此得到：

$$\bar{\mathbf{A}}_e = \mathbf{T}_i \Gamma \mathbf{A}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{T}_0^H \mathbf{T}_0 \Gamma \mathbf{A}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{T}_0^H \bar{\mathbf{A}}_0 \quad (4-11)$$

若令 $\mathbf{C} = \mathbf{T}_i \mathbf{T}_0^H$ ，则有 $\bar{\mathbf{A}}_e = \mathbf{C} \bar{\mathbf{A}}_0$ ，容易看出，当 $\Gamma \neq \mathbf{I}$ 时， \mathbf{C} 一般不为对角矩阵，这使得虚拟阵列的误差校正相比于原阵列更加复杂。为此，我们提出利用虚拟阵列进行 DOA 估计，同时结合原共形阵列来校正方向无关的阵列幅相误差的联合迭代自校正算法，将其称之为 VI-WF (Virtual Interpolation-WF) [90] 算法。

4.2.2 幅相误差快速校正算法

WF 算法通常采用谱峰搜索方法来获得信源方位估计，对于共形阵列，进行 2 维谱峰搜索的运算量大，难以实时快速完成，从而限制了 WF 算法在共形阵列上的应用。为解决 WF 算法在共形阵列上运算量大的问题，同时考虑到误差校正的复杂性，这里利用虚拟阵列进行快速 DOA 估计，同时结合原阵列进行误差参数估计，具体流程如下。

步骤 1：初始化 $l = 0$ ，离线计算理想的变换矩阵 \mathbf{B}_l ，同时令 $\hat{\Gamma}^l = \Gamma_0$ ，其中 Γ_0 为共形阵列幅相误差矩阵初始值，其具体取值参见式(4-16)；

步骤 2：由原阵列实际接收数据 \mathbf{x}_r 得到原阵列的实际噪声子空间 \mathbf{U}_{nr} ；

步骤 3：得到修正的变换矩阵 $\hat{\mathbf{B}}_0 = \left((\hat{\Gamma}^l)^H \right)^{-1} \mathbf{B}_l$ ，由式(4-2)和式(4-5)得到修正的虚拟噪声子空间 $\hat{\mathbf{U}}_n$ ，根据虚拟噪声子空间与虚拟信号子空间的正交性，结合 Root-MUSIC 算法得到信源方向的估计值 $(\hat{\theta}^l, \hat{\phi}^l)$ ，具体可参考文献[22]；

步骤 4：令 $\mathbf{w} = [1, 0, \dots, 0]^T$ ，由信源方向的估计值 $(\hat{\theta}^l, \hat{\phi}^l)$ 得到原阵列误差参数

的估计值:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{l+1} = \frac{\mathbf{Q}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^l, \hat{\boldsymbol{\phi}}^l) \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{Q}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^l, \hat{\boldsymbol{\phi}}^l) \mathbf{w}}, \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^{l+1} = \text{diag}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{l+1}) \quad (4-12)$$

步骤 5: 判断是否收敛, 若收敛则停止, 否则 $l = l + 1$, 并跳转至步骤 3, 继续迭代, 收敛条件为: $J^{(l+1)} - J^{(l)} \leq \varepsilon$, 其中 $J^{(l)} = (\hat{\boldsymbol{\delta}}^{l+1})^H \mathbf{Q}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^l, \hat{\boldsymbol{\phi}}^l) (\hat{\boldsymbol{\delta}}^{l+1})$ 。

与 WF 算法不同, 在所提算法中, 原共形阵列的幅度误差经过变换矩阵操作后在虚拟阵列上会产生额外的相位误差, 从而影响信源方位的初始估计精度。为了减小扩散误差, 首先得到原共形阵列各阵元幅度误差初始估计值 $\alpha_i (i = 2, \dots, N)$, 满足^[26]:

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{\mathbf{R}_r(i, i) - \widehat{\sigma}^2}{\mathbf{R}_r(1, 1) - \widehat{\sigma}^2}} \quad (4-13)$$

其中 $\widehat{\sigma}^2$ 为噪声功率估计值, 满足 $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N \lambda_i$, \mathbf{R}_r 为原共形阵列的实际数据协方差矩阵, λ_i 为 \mathbf{R}_r 的第 i 个特征值, 且 $\lambda_i > \lambda_j (i < j)$ 。由此得到原共形阵列幅度误差矩阵初始值:

$$\mathbf{G}_0 = \text{diag}([1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T) \quad (4-14)$$

取原阵列相位误差初始值:

$$\boldsymbol{\Phi}_0 = \text{diag}([1, \exp(j\varphi_2), \dots, \exp(j\varphi_N)]^T) \quad (4-15)$$

其中 $\exp(j\varphi_i) (i = 2, \dots, N)$ 为由系统先验信息得到相位误差初始值。

最终令幅相误差矩阵初始值如式(4-16):

$$\boldsymbol{\Gamma}_0 = \mathbf{G}_0 \odot \boldsymbol{\Phi}_0 \quad (4-16)$$

其中 \odot 表示 Hadamard 积运算。

在上述的幅相误差校正过程中, 利用虚拟阵列快速高效地实现了对信源方位的 DOA 估计, 并利用 DOA 估计值得到原阵列的误差参数, 运算量大大降低, 便于工程实现。同时, 由于共形阵列幅相误差矩阵初始值 $\boldsymbol{\Gamma}_0$ 中含有幅度误差信息, 从而减小了扩散误差, 提高了系统的校正性能。

4.2.3 运算复杂度分析

下面以图 4.1 所示的阵列模型为例进行分析, 原共形阵列采用图 4.1 (a) 所

示的半球阵列结构，利用图 4.1 (b) 所示的虚拟十字阵列对其进行内插变换。

WF 算法中采用 MUSIC 算法进行 2 维 DOA 估计。设原阵列阵元数为 N ，2 维谱峰搜索的点数为 K ，由此得到 WF 算法中实现 1 次 DOA 估计的运算复杂度为 $O[15(N-1)^3] + O[K(N^2 + N)]$ 。

利用虚拟阵列进行 DOA 估计的运算复杂度为 $O[255L(N_x - 1)^3]$ ， N_x 为虚拟阵列在 X 轴上的阵元数。由上述分析可知，当 $N \gg N_x$ 时，利用虚拟阵列实现 DOA 估计的运算量大大降低。

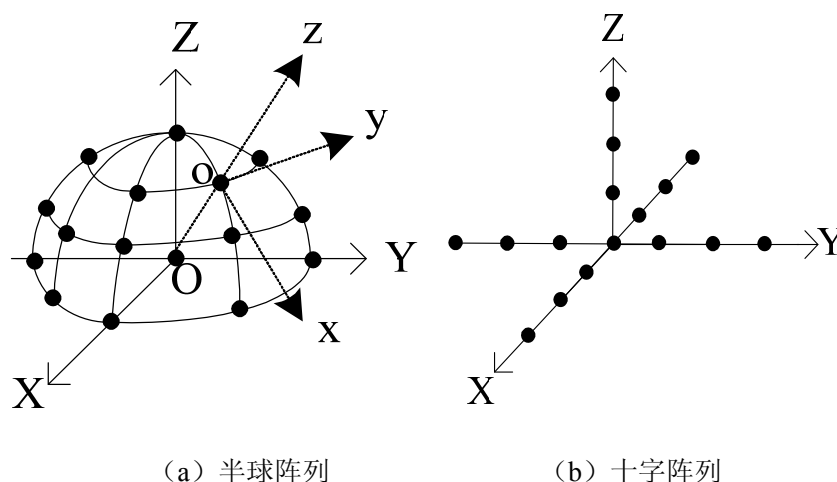


图 4.1 阵列模型

4.3 仿真实验

仿真实验中采用如图 4.1 (a) 示意的半球共形阵列，虚拟阵列如图 4.1 (b) 所示。半球阵列由原点处阵元和 4 个等距圆阵组成，各圆阵阵元数分别为 12, 8, 4, 1，半球底面半径取 2λ 。虚拟阵列各轴向阵元数为 4，间距为 $\lambda/2$ 。设阵元的

局部单元方向图 $\tilde{g}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ ，满足 $\tilde{g}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) = \begin{cases} \cos(\tilde{\varphi}), & 0 \leq \tilde{\varphi} \leq \pi/2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，其中 $\tilde{\varphi}$ 为局部俯仰角， $\tilde{\theta}$ 为局部方位角，阵元局部坐标系如图 4.1 (a) 中 o-xyz 所示。

阵元幅度误差、相位误差均服从 0 均值的高斯分布。幅度误差标准差为 σ_A ，当幅度误差为 χ dB 时， $\chi = 20 \lg(\sigma_A + 1)$ 成立。相位误差标准差为 σ_ϕ° ，以 σ_ϕ 来衡量相位误差的大小。

实验 1: 半球共形阵列含有 0.1dB 的幅度误差和 5° 的相位误差，信噪比为 10dB。在不同快拍数下，WF 算法和 VI-WF 算法在线实现幅相误差校正所需的

CPU 时间如表 4.1 所示。

表 4.1 在线实现幅相误差校正的 CPU 时间对比

快拍数	WF 算法 (s)	VI-WF 算法 (s)
100	224.444	0.371
200	224.207	0.358
500	225.915	0.372

可以看出, 相比于 WF 算法, VI-WF 算法在线完成 1 次幅相误差校正所用时间缩短了两个数量级, 证实了 VI-WF 算法运算量低和实现快速的优点。

实验 2: 半球共形阵列含有 0.1dB 的幅度误差和 5°的相位误差, 快拍数为 500, 当信噪比由 0dB 变化至 20dB 时, 经过 1000 次独立的蒙特卡洛实验, 得到 WF 算法和 VI-WF 算法进行 DOA 估计以及幅相误差校正的性能对比曲线, 如图 4.2 所示。

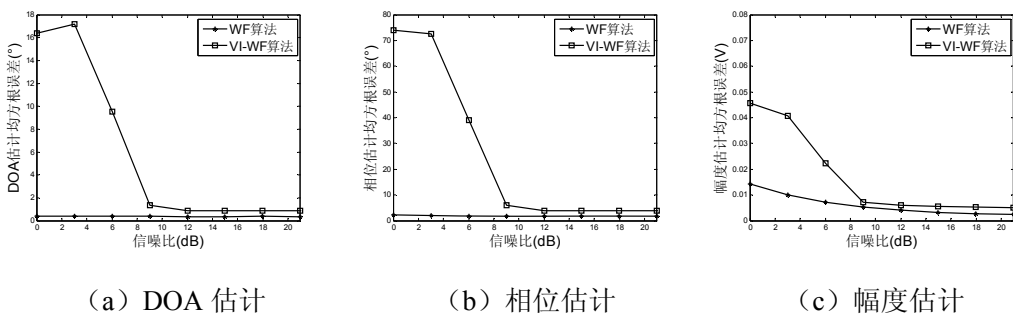


图 4.2 均方根误差随信噪比变化对比曲线

由仿真结果可知, 两种算法的幅相误差校正性能受信噪比影响较大, 信噪比越大两种算法的校正性能越优。在幅度误差校正方面, 两种算法性能接近; 在相位误差校正方面, 当信噪比较低时, VI-WF 算法性能明显低于原算法, 随着信噪比的增大, 二者校正性能接近。

实验 3: 信噪比取 10dB, 相位误差由 0°变化至 8°, 其它条件同实验 2, 得到 WF 算法和 VI-WF 算法进行 DOA 估计和幅相误差校正的性能对比曲线, 如图 4.3 所示。

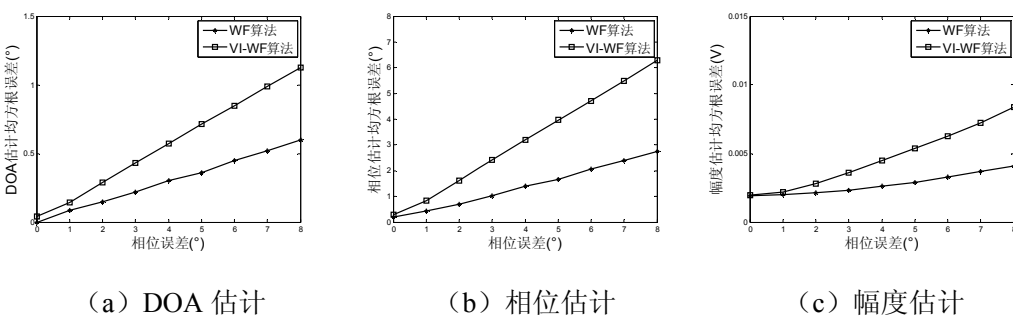


图 4.3 均方根误差随相位误差变化对比曲线

由仿真结果可知，两种算法对幅度误差的校正性能受相位误差影响较小，WF 算法性能略优于 VI-WF 算法。在 DOA 估计和相位误差校正方面，两种算法的校正性能均随相位误差的增大而变差。当相位误差较小时，VI-WF 算法与 WF 算法性能接近；随着相位误差的增大，VI-WF 算法性能逐渐变差。简言之，VI-WF 算法对幅度误差的校正性能受相位误差影响较小，而在 DOA 估计和相位误差校正方面对相位误差更敏感。

实验 4：相位误差取 5° ，幅度误差由 0dB 增至 0.5dB，其它条件同实验 3，利用两种算法进行 DOA 估计和幅相误差校正，其性能对比曲线如图 4.4 所示。

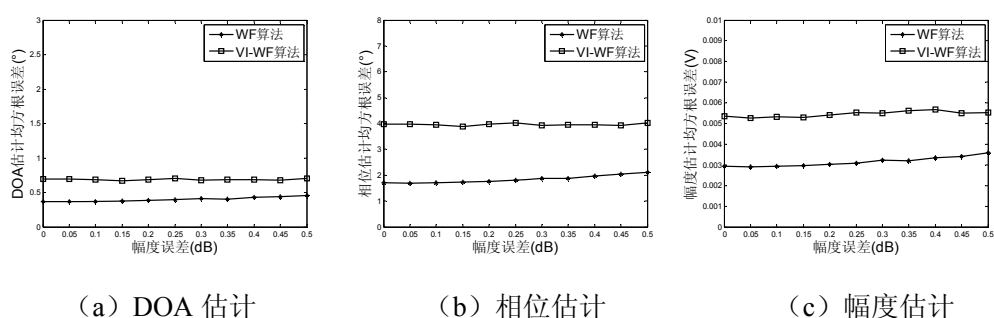


图 4.4 均方根误差随幅度误差变化对比曲线

由仿真结果可知，在 DOA 估计和幅相误差校正方面，VI-WF 算法略差于 WF 算法，其性能不随幅度误差的增大而变化，即 VI-WF 算法 DOA 估计和幅相误差校正性能独立于幅度误差。

4.4 小结

本章首先说明了传统幅相误差校正算法应用于共形阵列时存在的问题，然后分析了幅相误差对虚拟内插变换的影响，在此基础上将虚拟内插变换引入到共形阵列的幅相误差校正中，实现了共形阵列的快速幅相误差校正。仿真实验说明所提算法具有运算复杂度低、实现快速的优点，但对相位误差较敏感。

第五章 共形阵列互耦误差校正

5.1 引言

当共形阵列存在互耦误差时，由于阵列受载体曲率的影响，会引起各阵元方向图差异，使得共形阵列的互耦模型较为复杂。另外，当系统为非互易网络^[91]时，由于互阻的特殊性质^[92]，从而导致阵列互耦矩阵^[93]可以呈复共轭对称分布。这就使得传统的基于对称结构的互耦校正方法失效。

本章针对圆台型共形阵列，以互耦矩阵呈复共轭对称分布为前提，对其互耦误差特性进行详细分析，推导出了圆台共形阵列的互耦矩阵模型。利用互耦矩阵的特殊结构特性建立了两种互耦误差校正模型，在此基础上将多维参数迭代估计方法应用于两种模型上，实现了含互耦误差时的圆台共形阵列的 DOA 估计。

5.2 圆台共形阵列互耦模型

针对具体的圆台共形阵列，图 5.1 给出了相应的阵元分布示意图。设圆台阵列由 P 层均匀圆阵组合而成，每个圆阵的阵元个数为 Q ，总的阵元数 $N = PQ$ ，圆

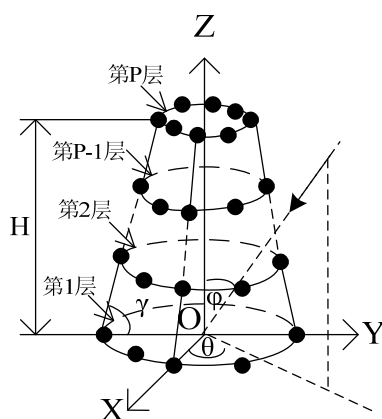


图 5.1 圆台阵列模型

台高度为 H ，圆台斜边倾角为 γ ，圆台底面半径为 R 。圆台阵第 1 层圆阵分布在 XOY 平面内，每层第 1 个阵元位于 X 轴正方向，按照 XOY 平面内逆时针方向进行编号，则可以计算出第 p 层、第 q 个阵元的空间笛卡尔坐标 x_{pq} 、 y_{pq} 、 z_{pq} 分别满足：

$$\begin{cases} x_{pq} = \left[R - \frac{H}{P-1}(p-1)\cot\gamma \right] \cos \left[\frac{2\pi}{Q}(q-1) \right] \\ y_{pq} = \left[R - \frac{H}{P-1}(p-1)\cot\gamma \right] \sin \left[\frac{2\pi}{Q}(q-1) \right] \\ z_{pq} = \frac{H}{P-1}(p-1) \end{cases} \quad (5-1)$$

式中, $p=1,2,\dots,P$, $q=1,2,\dots,Q$ 。第 (p,q) 个阵元的位置坐标矢量为:

$$\mathbf{r}_{pq} = [x_{pq}, y_{pq}, z_{pq}]^T \quad (5-2)$$

考虑阵列远场 (θ, φ) 方向的某个信源, 则由上述分析可知, 圆台阵列的导向矢量可表示为:

$$\mathbf{a} = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1Q}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{pQ}]^T \quad (5-3)$$

式中, $\mathbf{a}_{pq} = g_{pq}(\theta, \varphi) \exp(\mathbf{jkr}_{pq}^T \mathbf{v})$, \mathbf{v} 为 (θ, φ) 方向的方位矢量。由此得到圆台阵列的接收数据矢量为:

$$\mathbf{x}_{ic}(t) = \mathbf{a}(\theta, \varphi)s(t) + \mathbf{n}(t) \quad (5-4)$$

对于圆台共形阵列, 当其存在与方位无关的互耦误差时, 实际导向矢量 $\mathbf{a}_r(\theta, \varphi)$ 可以表示为:

$$\mathbf{a}_r(\theta, \varphi) = \mathbf{Z}\mathbf{a}(\theta, \varphi) \quad (5-5)$$

其中 \mathbf{Z} 为圆台阵列的互耦矩阵, 考虑互耦矩阵呈复共轭对称矩阵, 且满足 $\mathbf{Z}_{ii} = 1$ 。简单起见, 设圆台阵列层数 $P=3$, 每层的阵元数 $Q=8$, 图 5.2 给出了此时圆台阵列的俯视图, 并按 XOY 平面内逆时针方向进行了编号, 其中 $p-q$ 表示第 p 层圆阵的第 q 个阵元。

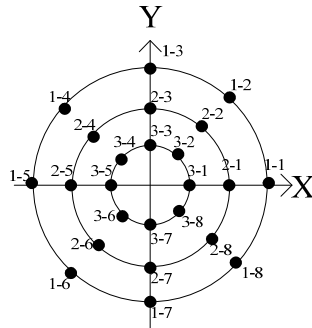


图 5.2 圆台阵列俯视图

将圆台共形阵列划分为 3 个子阵, 第 1 个子阵由第 1 层圆阵组成, 第 2 个子阵由第 2 层圆阵组成, 第 3 个子阵由第 3 层圆阵组成。设 3 个子阵在 (θ, φ) 方向的理想导向矢量分别为 $\mathbf{a}_i(\theta, \varphi)$ ($i=1,2,3$), 则圆台阵列的理想导向矢量可表示为:

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi) = [\mathbf{a}_1^T(\theta, \varphi) \quad \mathbf{a}_2^T(\theta, \varphi) \quad \mathbf{a}_3^T(\theta, \varphi)]^T \quad (5-6)$$

由阵列的俯视图可以看出，圆台共形阵列的互耦矩阵可以由子阵内的互耦子矩阵和子阵间的互耦子矩阵组合而成。设第 i 个子阵内的互耦子矩阵为 \mathbf{Z}_i ，第 i 个子阵与第 j 个子阵间的互耦子矩阵为 \mathbf{C}_{ij} ($i \neq j, i < j$)，则上述圆台阵列的互耦矩阵 \mathbf{Z} 可以表示为：

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{12}^* & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{13}^* & \mathbf{C}_{23}^* & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

容易看出，只要各阵元特性一致，由阵列的对称性即可得出 \mathbf{Z}_i 结构应与均匀圆阵类似，即呈循环复共轭对称 Toeplitz 分布，可表示为：

$$\mathbf{Z}_i = \text{Cir.her.sym.T}(\mathbf{z}_i) \quad (5-8)$$

其中 \mathbf{z}_i 表示 \mathbf{Z}_i 的循环矢量， $\text{Cir.her.sym.T}(\cdot)$ 表示得到某向量对应的循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵。下面以第 1 个子阵与第 3 个子阵为例，对子阵间的互耦子矩阵的特性进行分析。

若将第 p 层圆阵的第 q 个阵元表示为阵元 $p-q$ ，设阵元 $p-q$ 与阵元 $l-m$ 间的互耦系数为 $c_{p-q,l-m}$ ，则第 1 个子阵中阵元 1-1 与第 3 个子阵之间的互耦向量可以表示为：

$$[c_{1-1,3-1} \quad c_{1-1,3-2} \quad c_{1-1,3-3} \quad c_{1-1,3-4} \quad c_{1-1,3-5} \quad c_{1-1,3-6} \quad c_{1-1,3-7} \quad c_{1-1,3-8}] \quad (5-9)$$

由于第 3 个子阵相对于阵元 1-1 对称，容易看出互耦向量中 $c_{1-1,3-2} = c_{1-1,3-8}$ ， $c_{1-1,3-3} = c_{1-1,3-7}$ ， $c_{1-1,3-4} = c_{1-1,3-6}$ ，则阵元 1-1 与第 3 个子阵之间的互耦向量可以等价地表示为：

$$[c_{1-1,3-1} \quad c_{1-1,3-2} \quad c_{1-1,3-3} \quad c_{1-1,3-4} \quad c_{1-1,3-5} \quad c_{1-1,3-4} \quad c_{1-1,3-3} \quad c_{1-1,3-2}] \quad (5-10)$$

第 1 个子阵中阵元 1-2 与第 3 个子阵之间的互耦向量可以由阵元 1-1 与第 3 个子阵之间的互耦向量经循环移位得到，可以表示为：

$$[c_{1-1,3-2} \quad c_{1-1,3-1} \quad c_{1-1,3-2} \quad c_{1-1,3-3} \quad c_{1-1,3-4} \quad c_{1-1,3-5} \quad c_{1-1,3-4} \quad c_{1-1,3-3}] \quad (5-11)$$

同理得到第 1 个子阵各阵元与第 3 个子阵之间的互耦向量，最终得到第 1 个子阵与第 3 个子阵之间的互耦矩阵 \mathbf{C}_{13} ，其表达式如下：

$$\mathbf{C}_{13} = \begin{bmatrix} c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} \\ c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} \\ c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} \\ c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} \\ c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} \\ c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} \\ c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} & c_{1-1,3-2} \\ c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-5} & c_{1-1,3-4} & c_{1-1,3-3} & c_{1-1,3-2} & c_{1-1,3-1} \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

可以看出 \mathbf{C}_{13} 呈循环对称 Toeplitz 分布，若设 \mathbf{C}_{13} 的循环矢量为 \mathbf{c}_{13} ，满足：

$$\mathbf{c}_{13} = [c_{1-1,3-1} \quad c_{1-1,3-2} \quad c_{1-1,3-3} \quad c_{1-1,3-4} \quad c_{1-1,3-5}]^T \quad (5-13)$$

得到 $\mathbf{C}_{13} = \text{Cir.sym.T}(\mathbf{c}_{13})$ ，其中 $\text{Cir.sym.T}(\cdot)$ 表示得到某向量对应的循环对称 Toeplitz 矩阵。同理得到 \mathbf{C}_{12} 、 \mathbf{C}_{23} 、 \mathbf{C}_{12}^* 、 \mathbf{C}_{13}^* 、 \mathbf{C}_{23}^* 均呈循环对称 Toeplitz 分布。

5.3 互耦校正的数学基础

设 \mathbf{D} 为任意 $N \times N$ 维的循环对称 Toeplitz 矩阵，其循环向量 \mathbf{d} 可以表示为

$$\mathbf{d} = [d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_L]^T \quad (5-14)$$

其中 $d_i = \mathbf{D}_{1,i}$ ， $i=1,2,\dots,L$ ， L 为 \mathbf{D} 的自由度，满足 $L = \begin{cases} N/2+1 & N \text{ 为偶数} \\ (N+1)/2 & N \text{ 为奇数} \end{cases}$ 。

设 \mathbf{D}_{up} 为与 \mathbf{D} 对应的循环上三角 Toeplitz 矩阵， \mathbf{D}_{low} 为 \mathbf{D}_{up} 对应的循环下三角 Toeplitz 矩阵， \mathbf{D}_{neg} 为与 \mathbf{D} 对应的循环反对称 Toeplitz 矩阵， \mathbf{D}_h 为与 \mathbf{D} 对应的循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵。各矩阵分别满足：

$$(\mathbf{D}_{up})_{ij} = \begin{cases} (\mathbf{D})_{ij} & j \geq i \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5-15)$$

$$(\mathbf{D}_{low})_{ij} = \begin{cases} (\mathbf{D}_{up})_{ji}^* & i > j \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5-16)$$

$$(\mathbf{D}_{neg})_{ij} = \begin{cases} (\mathbf{D})_{ij} & j \geq i \\ -(\mathbf{D})_{ij} & \text{其它} \end{cases} \quad (5-17)$$

$$(\mathbf{D}_h)_{ij} = \begin{cases} (\mathbf{D})_{ij} & j \geq i \\ (\mathbf{D})_{ij}^* & \text{其它} \end{cases} \quad (5-18)$$

5.3.1 循环对称 Toeplitz 矩阵特性

已知任意一个 $N \times 1$ 维的复向量 \mathbf{X} 和一个任意 $N \times N$ 维的循环对称 Toeplitz 矩阵 \mathbf{D} ，则有下面等式成立^[20]：

$$\mathbf{D}\mathbf{X} = \mathbf{T}[\mathbf{X}]\mathbf{d} \quad (5-19)$$

其中 $\mathbf{T}[\mathbf{X}]$ 是一个 $N \times L$ 维的变换矩阵，其构造方式由下面方式得到：

$$\mathbf{T}[\mathbf{X}] = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 \quad (5-20)$$

\mathbf{T}_1 、 \mathbf{T}_2 、 \mathbf{T}_3 、 \mathbf{T}_4 分别满足：

$$[\mathbf{T}_1]_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{X}_{i+j-1} & i+j \leq N+1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5-21)$$

$$[\mathbf{T}_2]_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{X}_{i+j-1} & i \geq j \geq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5-22)$$

$$[\mathbf{T}_3]_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{X}_{N+1+i-j} & i < j \leq k \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, k = \begin{cases} N/2 & N \text{ 为偶数} \\ (N+1)/2 & N \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (5-23)$$

$$[\mathbf{T}_4]_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{X}_{i+j-1-N} & 2 \leq j \leq k, i+j \geq N+2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5-24)$$

若将 \mathbf{D} 展开为实部加虚部的形式，即：

$$\mathbf{D} = \text{Re}(\mathbf{D}) + j\text{Im}(\mathbf{D}) \quad (5-25)$$

则对于任意一个 $N \times 1$ 维的复向量 \mathbf{X} ，有下式成立：

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{X} &= [\mathbf{T}[\mathbf{X}] \quad j\mathbf{T}[\mathbf{X}]] \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{d}) \\ \text{Im}(\mathbf{d}) \end{bmatrix} \\ &\triangleq \mathbf{T}_{sym.pos}[\mathbf{X}] \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{d}) \\ \text{Im}(\mathbf{d}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-26)$$

同理可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^*\mathbf{X} &= [\mathbf{T}[\mathbf{X}] \quad j\mathbf{T}[\mathbf{X}]] \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{d}) \\ -\text{Im}(\mathbf{d}) \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{T}[\mathbf{X}] \quad -j\mathbf{T}[\mathbf{X}]] \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{d}) \\ \text{Im}(\mathbf{d}) \end{bmatrix} \\ &\triangleq \mathbf{T}_{sym.neg}[\mathbf{X}] \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{d}) \\ \text{Im}(\mathbf{d}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-27)$$

另外, \mathbf{DX} 也可以表达为:

$$\begin{aligned}\mathbf{DX} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}[\mathbf{X}] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^* \end{bmatrix} \\ &\triangleq \mathbf{T}_{sym1}[\mathbf{X}] \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^* \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5-28)$$

同理, $\mathbf{D}^*\mathbf{X}$ 可以表达为:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^*\mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}[\mathbf{X}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^* \end{bmatrix} \\ &\triangleq \mathbf{T}_{sym2}[\mathbf{X}] \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^* \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5-29)$$

5.3.2 循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵特性

设 \mathbf{D} 为 $N \times N$ 维的循环对称 Toeplitz 矩阵, \mathbf{D}_h 为与 \mathbf{D} 对应的循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵。

性质 1

\mathbf{D}_h 按实部加虚部的形式表示为:

$$\mathbf{D}_h = \text{Re}(\mathbf{D}_h) + \text{jIm}(\mathbf{D}_h) \quad (5-30)$$

容易看出 $\text{Re}(\mathbf{D}_h)$ 为循环对称 Toeplitz 矩阵, $\text{Im}(\mathbf{D}_h)$ 为循环反对称 Toeplitz 矩阵。若设与 $\text{Im}(\mathbf{D}_h)$ 对应的循环对称 Toeplitz 矩阵为 \mathbf{D}_{im} , 与 \mathbf{D}_{im} 对应的循环上三角 Toeplitz 矩阵为 $\mathbf{D}_{im.up}$, 则 $\text{Im}(\mathbf{D}_h)$ 可表示为:

$$\text{Im}(\mathbf{D}_h) = 2\mathbf{D}_{im.up} - \mathbf{D}_{im} \quad (5-31)$$

则对于任意一个 $N \times 1$ 维的复向量 \mathbf{X} , 下式成立:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_h\mathbf{X} &= [\text{Re}(\mathbf{D}_h) + \text{jIm}(\mathbf{D}_h)]\mathbf{X} \\ &= [\text{Re}(\mathbf{D}_h) + \text{j}(2\mathbf{D}_{im.up} - \mathbf{D}_{im})]\mathbf{X} \\ &= \text{Re}(\mathbf{D}_h)\mathbf{X} + \text{j}(2\mathbf{D}_{im.up} - \mathbf{D}_{im})\mathbf{X} \\ &= \mathbf{T}[\mathbf{X}]\text{Re}(\mathbf{d}) + \text{j}\{2\mathbf{T}_{up}[\mathbf{X}] - \mathbf{T}[\mathbf{X}]\}\text{Im}(\mathbf{d}) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}[\mathbf{X}] & \text{j}\{2\mathbf{T}_{up}[\mathbf{X}] - \mathbf{T}[\mathbf{X}]\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{d}) \\ \text{Im}(\mathbf{d}) \end{bmatrix} \\ &\triangleq \mathbf{T}_{h1}[\mathbf{X}] \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{d}) \\ \text{Im}(\mathbf{d}) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5-32)$$

其中 $\mathbf{T}_{up}[\mathbf{X}]$ 是一个 $N \times L$ 维的变换矩阵, 其构造方式由下面方式得到:

$$\mathbf{T}_{up}[\mathbf{X}] = \mathbf{T}_{up1} + \mathbf{T}_{up2} \quad (5-33)$$

根据附录 A, 有 \mathbf{T}_{up1} 、 \mathbf{T}_{up2} 分别为:

$$[\mathbf{T}_{up1}]_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{X}_{i+j-1} & i+j \leq N+1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5-34)$$

$$[\mathbf{T}_{up2}]_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{X}_{N+1+i-j} & \begin{cases} j \geq i+1, j < L, N \text{为偶数} \\ j \geq i+1, N \text{为奇数} \end{cases} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5-35)$$

性质 2

若设 \mathbf{D}_{hup} 为与 \mathbf{D}_h 对应的循环上三角 Toeplitz 矩阵, 设 \mathbf{D}_{hlow} 为与 \mathbf{D}_{hup} 对应的循环下三角 Toeplitz 矩阵, 则 \mathbf{D}_h 可以表示为:

$$\mathbf{D}_h = \mathbf{D}_{hup} + \mathbf{D}_{hlow} \quad (5-36)$$

则对于任意一个 $N \times 1$ 维的复向量 \mathbf{X} , 下式成立:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_h \mathbf{X} &= (\mathbf{D}_{hup} + \mathbf{D}_{hlow}) \mathbf{X} \\ &= \mathbf{D}_{hup} \mathbf{X} + \mathbf{D}_{hlow} \mathbf{X} \\ &= \mathbf{T}_{up}[\mathbf{X}] \mathbf{d}_{up} + \mathbf{T}_{low}[\mathbf{X}] \mathbf{d}_{low} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{up}[\mathbf{X}] & \mathbf{T}_{low}[\mathbf{X}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{up} \\ \mathbf{d}_{low} \end{bmatrix} \\ &\triangleq \mathbf{T}_{h2}[\mathbf{X}] \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{up} \\ \mathbf{d}_{low} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-37)$$

其中 $\mathbf{T}_{low}[\mathbf{X}]$ 是一个 $N \times L$ 维的变换矩阵, 其构造方式由下面方式得到:

$$\mathbf{T}_{low}[\mathbf{X}] = \mathbf{T}_{low1} + \mathbf{T}_{low2} \quad (5-38)$$

根据附录 B, 有 \mathbf{T}_{low1} 、 \mathbf{T}_{low2} 分别为:

$$[\mathbf{T}_{low1}]_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{X}_{i-j+1} & i \geq j \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5-39)$$

$$[\mathbf{T}_{low2}]_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{X}_{i+j-N-1} & \begin{cases} i+j \geq N+2, j < L, N \text{为偶数} \\ i+j \geq N+2, N \text{为奇数} \end{cases} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5-40)$$

5.4 圆台共形阵列互耦矩阵分解模型

由上述分析可知, 当 $P=3$, $Q=8$ 时, 圆台阵列的互耦矩阵 \mathbf{Z} 可表示为:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{12}^* & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{13}^* & \mathbf{C}_{23}^* & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix} \quad (5-41)$$

其中主对角子阵 \mathbf{Z}_i 呈循环复共轭对称 Toeplitz 分布, 其余各子阵均呈循环对称 Toeplitz 分布。当阵列存在互耦时, 实际导向矢量 \mathbf{a}_r 可以表示为 $\mathbf{a}_r = \mathbf{Z}\mathbf{a}$, 设 $\mathbf{a}(\theta, \varphi) = [\mathbf{a}_1^T(\theta, \varphi) \quad \mathbf{a}_2^T(\theta, \varphi) \quad \mathbf{a}_3^T(\theta, \varphi)]^T$, 其中 $\mathbf{a}_i(\theta, \varphi)$ ($i=1,2,3$) 分别为第 i 个子圆环阵列在 (θ, φ) 方向的理想导向矢量, 则实际导向矢量 \mathbf{a}_r 可以表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r &= \mathbf{Z}\mathbf{a}(\theta, \varphi) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{12}^* & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{C}_{13}^* & \mathbf{C}_{23}^* & \mathbf{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\theta, \varphi) \\ \mathbf{a}_2(\theta, \varphi) \\ \mathbf{a}_3(\theta, \varphi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1\mathbf{a}_1(\theta, \varphi) + \mathbf{C}_{12}\mathbf{a}_2(\theta, \varphi) + \mathbf{C}_{13}\mathbf{a}_3(\theta, \varphi) \\ \mathbf{C}_{12}^*\mathbf{a}_1(\theta, \varphi) + \mathbf{Z}_2\mathbf{a}_2(\theta, \varphi) + \mathbf{C}_{23}\mathbf{a}_3(\theta, \varphi) \\ \mathbf{C}_{13}^*\mathbf{a}_1(\theta, \varphi) + \mathbf{C}_{23}^*\mathbf{a}_2(\theta, \varphi) + \mathbf{Z}_3\mathbf{a}_3(\theta, \varphi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-42)$$

模型 I

由循环对称 Toeplitz 矩阵性质和循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵性质 1 可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1\mathbf{a}_1(\theta, \varphi) + \mathbf{C}_{12}\mathbf{a}_2(\theta, \varphi) + \mathbf{C}_{13}\mathbf{a}_3(\theta, \varphi) \\ \mathbf{C}_{12}^*\mathbf{a}_1(\theta, \varphi) + \mathbf{Z}_2\mathbf{a}_2(\theta, \varphi) + \mathbf{C}_{23}\mathbf{a}_3(\theta, \varphi) \\ \mathbf{C}_{13}^*\mathbf{a}_1(\theta, \varphi) + \mathbf{C}_{23}^*\mathbf{a}_2(\theta, \varphi) + \mathbf{Z}_3\mathbf{a}_3(\theta, \varphi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{h1}[\mathbf{a}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{sym.pos}[\mathbf{a}_2] & \mathbf{T}_{sym.pos}[\mathbf{a}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}_{h1}[\mathbf{a}_2] & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{sym.neg}[\mathbf{a}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{sym.pos}[\mathbf{a}_3] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}_{h1}[\mathbf{a}_3] & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{sym.neg}[\mathbf{a}_1] & \mathbf{T}_{sym.neg}[\mathbf{a}_2] \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 \quad (5-43) \\ &\triangleq \mathbf{G}_1[\mathbf{a}(\theta, \varphi)]\mathbf{v}_1 \end{aligned}$$

其中向量 \mathbf{v}_1 可表示为:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \text{Re}(\mathbf{z}_1) \\ \text{Im}(\mathbf{z}_1)_{[2:L]} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} \text{Re}(\mathbf{z}_2) \\ \text{Im}(\mathbf{z}_2)_{[2:L]} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} \text{Re}(\mathbf{z}_3) \\ \text{Im}(\mathbf{z}_3)_{[2:L]} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} \text{Re}(\mathbf{c}_{12}) \\ \text{Im}(\mathbf{c}_{12}) \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} \text{Re}(\mathbf{c}_{13}) \\ \text{Im}(\mathbf{c}_{13}) \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} \text{Re}(\mathbf{c}_{23}) \\ \text{Im}(\mathbf{c}_{23}) \end{array} \right]^T \end{bmatrix}^T \quad (5-44)$$

式中 L 为子互耦矩阵的自由度, 由 $Q=8$ 得到 $L=5$ 。 \mathbf{z}_i 表示 \mathbf{Z}_i 的循环矢量, 且 \mathbf{z}_i 的首元素为 1, \mathbf{c}_{ij} 表示 \mathbf{C}_{ij} 的循环矢量, $\mathbf{z}_{i[2:L]}$ 表示向量 \mathbf{z}_i 中第 2 个至第 L 个元素组成的列向量。考虑 $\text{Im}(\mathbf{z}_i)$ 的首元素为 0, 实际中通常选择 \mathbf{z}_i 中的未知非零元素来构造待求解的互耦向量。矩阵操作 $\tilde{\mathbf{T}}_{h1}[\cdot] = \mathbf{T}_{h1}[\cdot]_{(:,L+1)=[]}$, 即矩阵 $\tilde{\mathbf{T}}_{h1}[\cdot]$ 与矩阵 $\mathbf{T}_{h1}[\cdot]$ 剔除第 $L+1$ 列之后的矩阵相同。 \mathbf{Z} 与 \mathbf{v}_1 之间满足:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \text{Cir.her.sym.T}(\mathbf{z}_1) & \text{Cir.sym.T}(\mathbf{c}_{12}) & \text{Cir.sym.T}(\mathbf{c}_{13}) \\ \text{Cir.sym.T}(\mathbf{c}_{12}^*) & \text{Cir.her.sym.T}(\mathbf{z}_2) & \text{Cir.sym.T}(\mathbf{c}_{23}) \\ \text{Cir.sym.T}(\mathbf{c}_{13}^*) & \text{Cir.sym.T}(\mathbf{c}_{23}^*) & \text{Cir.her.sym.T}(\mathbf{z}_3) \end{bmatrix} \quad (5-45)$$

$$\triangleq f_1[\mathbf{v}_1]$$

模型 II

由循环对称 Toeplitz 矩阵性质和循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵性质 2 可以得到:

$$\mathbf{a}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_1(\theta, \varphi) + \mathbf{C}_{12} \mathbf{a}_2(\theta, \varphi) + \mathbf{C}_{13} \mathbf{a}_3(\theta, \varphi) \\ \mathbf{C}_{12}^* \mathbf{a}_1(\theta, \varphi) + \mathbf{Z}_2 \mathbf{a}_2(\theta, \varphi) + \mathbf{C}_{23} \mathbf{a}_3(\theta, \varphi) \\ \mathbf{C}_{13}^* \mathbf{a}_1(\theta, \varphi) + \mathbf{C}_{23}^* \mathbf{a}_2(\theta, \varphi) + \mathbf{Z}_3 \mathbf{a}_3(\theta, \varphi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{h2}[\mathbf{a}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\text{sym1}}[\mathbf{a}_2] & \mathbf{T}_{\text{sym1}}[\mathbf{a}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}_{h2}[\mathbf{a}_2] & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\text{sym2}}[\mathbf{a}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\text{sym1}}[\mathbf{a}_3] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}_{h2}[\mathbf{a}_3] & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\text{sym2}}[\mathbf{a}_1] & \mathbf{T}_{\text{sym2}}[\mathbf{a}_2] \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 \quad (5-46)$$

$$\triangleq \mathbf{G}_2[\mathbf{a}(\theta, \varphi)] \mathbf{v}_2$$

其中向量 \mathbf{v}_2 可表示为:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{1up} \\ \mathbf{z}_{1low[2:L]} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{2up} \\ \mathbf{z}_{2low[2:L]} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{3up} \\ \mathbf{z}_{3low[2:L]} \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{12} \\ \mathbf{c}_{12}^* \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{13} \\ \mathbf{c}_{13}^* \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{23} \\ \mathbf{c}_{23}^* \end{bmatrix}^T \end{bmatrix}^T \quad (5-47)$$

式中 \mathbf{z}_{iup} 的首元素为 1, \mathbf{z}_{ilow} 的首元素为 0, 构造互耦向量时可将其剔除, \mathbf{c}_{ij} 表示 \mathbf{C}_{ij} 的循环矢量, 矩阵操作 $\tilde{\mathbf{T}}_{h2}[\cdot] = \mathbf{T}_{h2}[\cdot]_{(:,L+1)=[]}$ 。 \mathbf{Z} 与 \mathbf{v}_2 之间满足:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \text{Cir.up.low}(\mathbf{z}_{1up}, \mathbf{z}_{1low}) & \text{Cir.sym.T}(\mathbf{c}_{12}) & \text{Cir.sym.T}(\mathbf{c}_{13}) \\ \text{Cir.sym.T}(\mathbf{c}_{12}^*) & \text{Cir.up.low}(\mathbf{z}_{2up}, \mathbf{z}_{2low}) & \text{Cir.sym.T}(\mathbf{c}_{23}) \\ \text{Cir.sym.T}(\mathbf{c}_{13}^*) & \text{Cir.sym.T}(\mathbf{c}_{23}^*) & \text{Cir.up.low}(\mathbf{z}_{3up}, \mathbf{z}_{3low}) \end{bmatrix} \quad (5-48)$$

$$\triangleq f_2[\mathbf{v}_2]$$

其中 $\text{Cir.up.low}(\mathbf{z}_{iup}, \mathbf{z}_{ilow})$ 表示由向量组 $(\mathbf{z}_{iup}, \mathbf{z}_{ilow})$ 生成的循环复共轭对称 Toeplitz 矩阵。

5.5 互耦参数与 DOA 联合估计

设信源数为 M , 由子空间原理可定义如下代价函数:

$$\begin{aligned}
J_i &= \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_r^H(\theta_m, \varphi_m) \mathbf{U}_{nr} \mathbf{U}_{nr}^H \mathbf{a}_r(\theta_m, \varphi_m) \\
&= \sum_{m=1}^M [\mathbf{Z}\mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)]^H \mathbf{U}_{nr} \mathbf{U}_{nr}^H [\mathbf{Z}\mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)] \\
&= \mathbf{v}_i^H \left\{ \sum_{m=1}^M \mathbf{G}_i^H [\mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)] \mathbf{U}_{nr} \mathbf{U}_{nr}^H \mathbf{G}_i [\mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)] \right\} \mathbf{v}_i
\end{aligned} \tag{5-49}$$

其中 $i=1,2$ ，分别对应两种模型， J_1 为第 1 个模型的代价函数， J_2 为第 2 个模型的代价函数， \mathbf{U}_{nr} 表示阵列的实际噪声子空间。由于在模型 1 中， \mathbf{v}_1 为实向量，为了得到实数解，将 J_1 做如下修正：

$$J_1 = \mathbf{v}_i^H \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=1}^M \mathbf{G}_i^H [\mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)] \mathbf{U}_{nr} \mathbf{U}_{nr}^H \mathbf{G}_i [\mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)] \right\} \mathbf{v}_i \tag{5-50}$$

修正后的代价函数为实函数，可以得到实数解。由此分别令：

$$\begin{cases} \mathbf{\Omega}_1 = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=1}^M \mathbf{G}_1^H [\mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)] \mathbf{U}_{nr} \mathbf{U}_{nr}^H \mathbf{G}_1 [\mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)] \right\} \\ \mathbf{\Omega}_2 = \sum_{m=1}^M \mathbf{G}_2^H [\mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)] \mathbf{U}_{nr} \mathbf{U}_{nr}^H \mathbf{G}_2 [\mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)] \end{cases} \tag{5-51}$$

当 $(\theta_m, \varphi_m) (m=1,2,\dots,M)$ 为信源真实方向时，代价函数取最小值，则上述互耦校正可以等价于下面的多点约束优化问题：

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i^H \mathbf{\Omega}_i \mathbf{v}_i \\ \text{s.t. } \mathbf{v}_i^H \mathbf{w} = \mathbf{F}^H \end{cases} \tag{5-52}$$

其中 $\mathbf{w} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3]$ ，满足 $\mathbf{w}_1 = \left[\underbrace{1, 0, \dots, 0}_L, \underbrace{0, \dots, 0}_{11L-3} \right]^T$ ， $\mathbf{w}_2 = \left[\underbrace{0, \dots, 0}_{2L-1}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_L, \underbrace{0, \dots, 0}_{9L-2} \right]^T$ ，

$\mathbf{w}_3 = \left[\underbrace{0, \dots, 0}_{4L-2}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_L, \underbrace{0, \dots, 0}_{7L-1} \right]^T$ ， \mathbf{F} 为约束矩阵，满足 $\mathbf{F} = [1, 1, 1]^T$ ， \mathbf{F} 和 \mathbf{w} 共同完成

对 \mathbf{v}_i 中某些特定位置元素的置 1 约束。由式(5-52)可解得 \mathbf{v}_i 的估计：

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{\Omega}_i^{-1} \mathbf{w} (\mathbf{w}^T \mathbf{\Omega}_i^{-1} \mathbf{w})^{-1} \mathbf{F} \tag{5-53}$$

由 $\hat{\mathbf{v}}_i$ 即可得到圆台共形阵列互耦矩阵估计值：

$$\hat{\mathbf{Z}}_i = f_i [\hat{\mathbf{v}}_i] \tag{5-54}$$

由以上分析可知，圆台共形阵列互耦参数的估计可以直接由信源 DOA 估计获得，同时，由互耦参数重构出的互耦矩阵有助于得到更准确的 DOA 估计，若将两种操作迭代进行，在代价函数趋于收敛的过程中即可实现圆台共形阵列互耦参数与 DOA 的联合估计。所以，算法的实现流程可按如下步骤进行：

步骤 1：初始化 $l=0$ ，同时令 $\hat{\mathbf{Z}}_i^l = \mathbf{Z}_0$ ，其中 \mathbf{Z}_0 为根据先验知识或测量值确

定的圆台阵列互耦矩阵初始值，然后利用圆台阵列实际接收数据估计数据协方差矩阵，将其进行特征值分解得到阵列实际的噪声子空间 \mathbf{U}_{nr} ；

步骤 2：由下式计算空间谱：

$$P_{MUSIC}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\left| \mathbf{U}_{nr}^H \hat{\mathbf{Z}}_i^l \mathbf{a}(\theta, \varphi) \right|^2} \quad (5-55)$$

并进行谱峰搜索，得到 DOA 估计值 $(\hat{\theta}_m, \hat{\varphi}_m)$ ($m=1, 2, \dots, M$)；

步骤 3：得到第 $l+1$ 次迭代的互耦向量的估计值 $\hat{\mathbf{v}}_i^{l+1}$ ：

$$\hat{\mathbf{v}}_i^{l+1} = (\mathbf{\Omega}_i^l)^{-1} \mathbf{w} \left[\mathbf{w}^T (\mathbf{\Omega}_i^l)^{-1} \mathbf{w} \right]^{-1} \mathbf{F} \quad (5-56)$$

以及第 $l+1$ 次迭代的互耦矩阵估计值：

$$\hat{\mathbf{Z}}_i^{l+1} = f_i \left[\hat{\mathbf{v}}_i^{l+1} \right] \quad (5-57)$$

步骤 4：判断是否收敛，若收敛则停止，否则 $l=l+1$ ，并跳转至步骤 2，继续迭代，收敛条件为： $J_i^{(l-1)} - J_i^{(l)} \leq \varepsilon$ 。

由上述步骤即可实现存在互耦误差时的圆台共形阵列的 DOA 估计。由于所提的两种误差校正模型均基于矩阵分解原理，所以将所提算法统称为 MF (Matrix Factoring) [94] 算法，模型 1、模型 2 对应的校正算法分别称为 MF1 算法、MF2 算法。

5.6 解的存在性分析

设信源个数为 M ，圆台阵列由 P 层均匀圆阵组合而成，每个圆阵的阵元个数为 Q ，则由式 $\mathbf{a}_r(\theta, \varphi) = \mathbf{G}_i \left[\mathbf{a}(\theta, \varphi) \right] \mathbf{v}_i$ 可知，未知向量中参数的个数为 $2L(C_p^2 + P) - 2P$ ，其中 L 为各子阵列互耦矩阵的自由度，满足 $L = \begin{cases} Q/2 + 1 & Q \text{ 为偶数} \\ (Q+1)/2 & Q \text{ 为奇数} \end{cases}$ ， $(C_p^2 + P)$ 为子阵互耦矩阵的个数， P 为子阵内的互耦子矩阵个数。 M 个信源可得到的方程个数为 $2PQM$ ，要解出向量 \mathbf{v}_i ，需满足：

$$2L(C_p^2 + P) - 2P < 2PQM \quad (5-58)$$

解得信源个数 M 需满足：

$$M > \frac{L \left(\frac{P-1}{2} + 1 \right) - 1}{Q} \quad (5-59)$$

5.7 仿真实验

仿真实验中, 采用图5.1示意的圆台共形阵列, 取圆台阵列层数 $P=3$, 每层阵元个数 $Q=8$, 圆台高度 $H=\lambda$, 圆台底面半径 $R=\lambda$, 圆台斜边倾角 $\gamma=60^\circ$ 。信源个数为4, 方位分别为: $(\theta_1, \varphi_1)=(57^\circ, 21^\circ)$, $(\theta_2, \varphi_2)=(139^\circ, 37^\circ)$, $(\theta_3, \varphi_3)=(34^\circ, 53^\circ)$, $(\theta_4, \varphi_4)=(113^\circ, 71^\circ)$ 。设圆台阵列中阵元 i 与阵元 j 间的互耦系数服从均值为0, 方差为 $\sigma_{i,j}$ 的高斯分布, 其中 $\sigma_{i,j} = \sigma_{3-1,3-2} d_{3-1,3-2} / d_{i,j}$, $d_{i,j}$ 为阵元 i 与阵元 j 的间距, $\sigma_{3-1,3-2}$ 为阵元3-1与阵元3-2之间互耦系数的方差, 以 $\sigma_{3-1,3-2}$ 来衡量互耦误差的大小。利用CMS算法进行实验对比时, 选取两组校正源分别进行实验仿真。第1组校正源方位角在 $[10^\circ, 170^\circ]$ 内以 20° 间隔均匀分布, 俯仰角在 $[10^\circ, 70^\circ]$ 内以 20° 间隔均匀分布, 各校正源由方位角和俯仰角组合而成, 将该条件下进行的实验仿真记为“CMS(1)”。第2组校正源其方位角在 $[15^\circ, 165^\circ]$ 内以 15° 间隔均匀分布, 俯仰角在 $[15^\circ, 75^\circ]$ 内以 30° 间隔均匀分布, 将该条件下的实验仿真记为“CMS(2)”。

实验中为了衡量互耦误差校正的性能, 定义参数 ρ , 满足 $\rho = \frac{|\hat{\mathbf{a}}^H \tilde{\mathbf{a}}|}{\sqrt{|\hat{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{a}}| |\tilde{\mathbf{a}}^H \tilde{\mathbf{a}}|}}$,

称 ρ 为向量 $\hat{\mathbf{a}}$ 和向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 之间的相关系数, 其中 $\tilde{\mathbf{a}}$ 为 (θ, φ) 方位的实际导向矢量, $\hat{\mathbf{a}}$ 为估计得到的导向矢量, 满足 $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{Z}} \mathbf{a}(\hat{\theta}, \hat{\varphi})$, $\hat{\mathbf{Z}}$ 和 $(\hat{\theta}, \hat{\varphi})$ 分别为互耦矩阵估计值和信源方位估计值。从相关系数的表达式可以看出, 其取值范围为 $[0, 1]$, 且数值越大, 表示两个向量之间夹角越小或两个向量的方向越一致。

实验 1: 互耦误差为 0.1, 信噪比由 -10dB 变化至 20dB, 考察 $(\theta, \varphi) = (34^\circ, 53^\circ)$ 处信源的 DOA 估计性能和 4 个信源方位的平均相关系数。经过 1000 次独立的蒙特卡洛实验, 得到校正前和利用 MF 方法以及 CMS 方法分别进行校正的 DOA 估计性能和平均相关系数随信噪比变化曲线, 如图 5.3 所示。

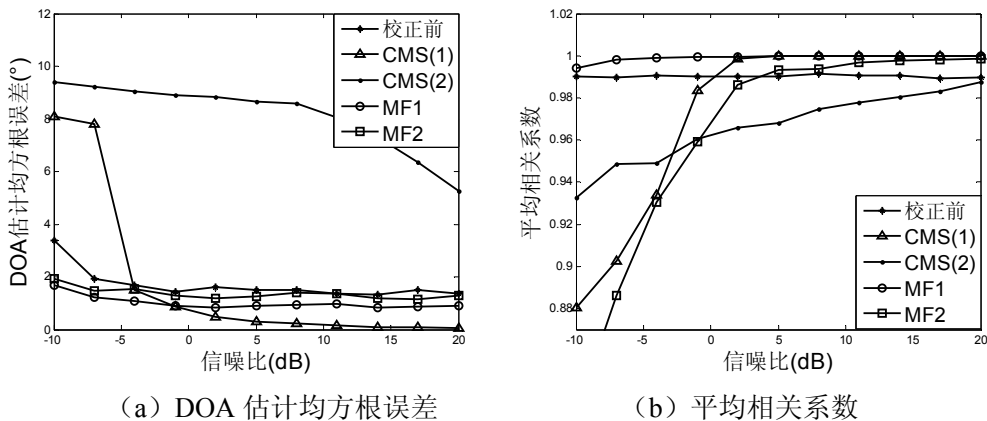


图 5.3 估计性能随信噪比变化对比曲线

可以看出, 信噪比越大, 各种算法的 DOA 估计性能越好。同一信噪比下,

MF 算法的 DOA 估计性能均要好于校正前的 DOA 估计性能,且 MF1 的性能好于 MF2。信噪比较低时, CMS 在第 1 组校正源配置下的 DOA 估计性能要差于校正前,随着信噪比的增大,其 DOA 估计性能逐渐好于 MF 算法的性能。而 CMS 在第 2 组校正源配置下的 DOA 估计性能始终是最差的。由此可以看出,相对于 CMS 方法, MF 算法在 DOA 估计方面具有较低的信噪比门限。

导向矢量相关性方面,其性能与相同条件下的 DOA 估计性能关系一致。CMS 方法的平均相关系数受信噪比影响较大,在低信噪比时估计出的导向矢量与实际导向矢量之间相关性较差。该方法在第 1 组校正源配置下的性能随信噪比增加而趋于最优,而在第 2 组校正源配置下得到的整体性能均较差。MF1 算法的平均相关系数基本不受信噪比影响, MF1 算法的性能优于 MF2。经过 MF 算法校正后,导向矢量的相关程度相比于校正前有所改善。高信噪比时, MF1 算法与 CMS 方法在第 1 组校正源配置下的性能接近,而在低信噪比时, MF1 算法具有明显优势,由此再次证实了 MF 算法具有较低的信噪比门限。

实验 2: 取信噪比为 20dB, 将互耦误差由 0 变化至 0.2, 其余条件同实验 2, 经过 1000 次独立的蒙特卡洛实验, 得到校正前和 MF 方法以及 CMS 方法分别进行校正的 DOA 估计性能和平均相关系数随互耦误差变化曲线, 如图 5.4 所示。

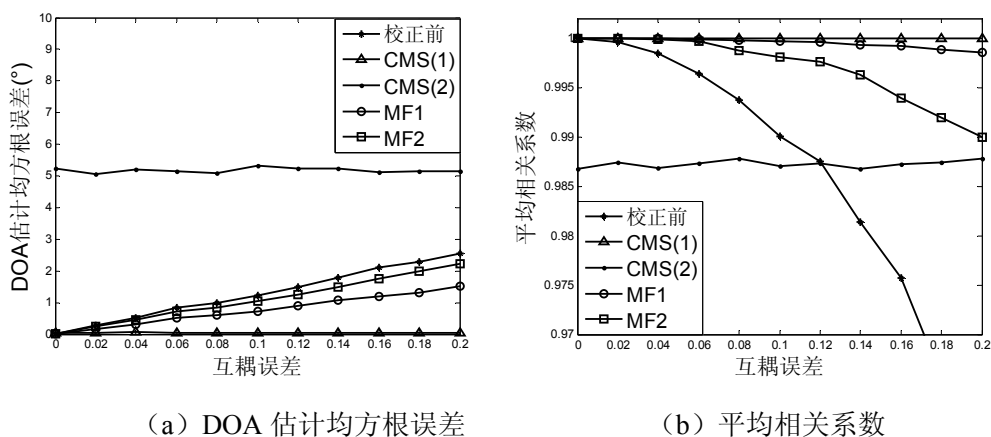


图 5.4 估计性能随互耦误差变化对比曲线

DOA 估计方面,若不进行互耦校正,直接进行 DOA 估计的性能会随互耦误差的增大而迅速恶化。利用 CMS 方法进行 DOA 估计的性能基本不随互耦误差变化,但受校正源配置影响较大:第 1 组校正源配置下的 DOA 估计性能较为优越,而在第 2 组校正源配置下进行 DOA 估计其性能很差。利用 MF 算法进行 DOA 估计,其性能相比于校正前有所改善, MF1 的估计性能好于 MF2。另外可以看出, MF 算法的 DOA 估计性能会受到互耦误差的影响,且随互耦误差的增大而恶化,这是因为,互耦误差较大时,算法由于初始 DOA 估计偏差较大而易导致最终收敛于局部最优点,从而不能较好地实现 DOA 估计。这也是一般自校正算法不可

避免的缺点。

导向矢量相关性方面，互耦误差校正前，导向矢量相关性随互耦误差的增大而急剧恶化。CMS 方法校正后的导向矢量相关性基本不受互耦误差影响，在第 1 组校正源配置下的校正性能较为优越，而在第 2 组校正源配置下性能较差。利用 MF 算法进行误差校正其平均相关系数会受到互耦误差的影响，互耦误差较小时，MF 算法的性能同 CMS 方法在第 1 组校正源配置下的性能接近，随着互耦误差增大，MF 算法得到的导向矢量相关性逐渐下降。相比于 MF1，MF2 受互耦误差的影响较大，但其平均相关系数要高于 CMS 方法在第 2 组校正源配置下的性能。同样得出结论，互耦误差较小时，MF 算法性能较优，而随着互耦误差的增大，MF 算法的误差校正能力也会相应变差。

5.8 小结

本章通过对圆台阵列互耦特性进行分析，推导出了圆台共形阵列的互耦模型，在此模型下利用多维联合迭代方法实现了存在互耦误差时的圆台共形阵列 DOA 估计。本章分析和仿真均是在圆台共形阵列下进行的，由于圆柱阵列、圆锥阵列均可视为圆台阵列的特例，使得该方法在圆柱形、圆锥形共形阵列上依然适用。理论分析和仿真实验表明所提的 MF 算法可以改善信源的 DOA 估计性能，使得估计得到的导向矢量更接近于实际导向矢量，且 MF 算法具有较低的信噪比门限，可为共形阵列的工程应用提供参考。MF 算法的缺点是，当互耦误差较大时算法容易收敛至局部最优点而导致最终的 DOA 估计误差较大，此时估计出的导向矢量与实际导向矢量之间相关性变差。另外，MF 算法只能实现特定结构共形阵列存在互耦误差时的 DOA 估计，当阵列为一般结构时如何进行互耦校正还需进一步探讨和研究。

第六章 共形阵列快速 DOA 估计方法

6.1 引言

由于 DOA 估计在雷达、声呐和移动通信应用方面的重要意义，DOA 估计技术近几十年来一直备受关注。常用的 DOA 估计算法有 Capon 波束形成法^[95]，最大似然法和基于子空间的算法，其中以子空间类算法性能最为优越。但是子空间类 DOA 估计算法通常运算量大，尤其当其应用于共形阵列时，由于其布阵的特殊性，导致阵列流形不具有 Vander monde 结构，某些快速子空间类算法（如 Root-MUSIC 等）不能直接应用，从而限制了超分辨子空间类算法在共形阵列上的应用。因此研究共形阵列下的快速 DOA 估计方法具有重要的理论和应用价值。

共形阵列下典型的快速 DOA 估计算法可分为虚拟内插变换类方法和流形分离类方法等。本章在介绍典型快速 DOA 估计算法的基础上，针对虚拟内插变换方法展开具体分析。将虚拟阵列内插方法应用于半球共形阵列中，建立了半球阵列到虚拟矩形阵和虚拟十字阵两种变换关系，并对两种方式在 DOA 估计、波束形成、运算复杂度等方面的性能进行了分析对比和仿真验证。

6.2 快速 DOA 估计方法

现有的共形阵列快速 DOA 估计方法有多种解决方案。第一种方案为流形分离类方法，这种方法将任意阵列的导向矢量表示成采样矩阵与具有 Vander monde 结构的基矢量的乘积，其中采样矩阵描述阵列本身，基矢量反映信号的角度特征，两部分相互独立，利用基矢量的特殊结构即可实现快速 DOA 估计。第二种方案为虚拟内插变换类方法，该方法通过设置虚拟阵列，利用转换矩阵将原阵列的接收数据转换为虚拟阵列的接收数据，然后借助虚拟阵列的特殊结构实现快速 DOA 估计。此外还有一些针对特定阵列结构的 DOA 估计方法，如针对均匀圆阵的模式空间变换法^[67]、利用阵列中的等距线阵实现锥台阵列快速 DOA 估计^[72, 73]等。

6.2.1 流形分离类方法

简单起见，设某一阵列分布于如图 6.1 所示的 2 维平面 XOY 内（并不限于 2 维阵列，3 维阵列可推广适用），则导向矢量的第 n 个元素可以写为如下形式：

$$[\mathbf{a}(\theta)]_n = \exp[jkr_n(\cos \gamma_n \cos \theta + \sin \gamma_n \sin \theta)] = \exp[jkr_n \cos(\gamma_n - \theta)] \quad (6-1)$$

其中 r_n 表示第 n 个阵元与原点间的距离, γ_n 为第 n 个阵元的方位角, $[\cdot]_n$ 表示取向量的第 n 个元素。

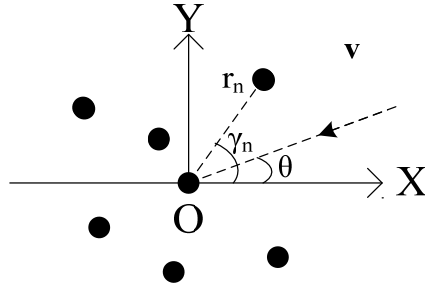


图 6.1 任意 2 维阵列示意图

由 Jacobi-Anger 等式^[61], 式(6-1)可以等效的表示为:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}(\theta)]_n &= \exp[jkr_n \cos(\gamma_n - \theta)] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} j^m J_m(kr_n) \exp[jm(\gamma_n - \theta)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\mathbf{G}(r_n, \gamma_n)]_{(n,m)} \exp(-jm\theta) \end{aligned} \quad (6-2)$$

其中 $[\mathbf{G}(r_n, \gamma_n)]_{(n,m)} = \sqrt{2\pi} j^m J_m(kr_n) \exp(jm\gamma_n)$ 表示采样矩阵 $\mathbf{G}(r_n, \gamma_n)$ 中第 (n, m) 个元素, $J_m(\cdot)$ 为 m 阶第一类 Bessel 函数, $\mathbf{G}(r_n, \gamma_n)$ 只依赖于阵列参数而与来波方向无关。

结合上述分析, 导向矢量 $\mathbf{a}(\theta)$ 可以表示成采样矩阵与基矢量的乘积形式^[61],

即:

$$\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{G}\mathbf{d}(\theta) \quad (6-3)$$

其中 $[\mathbf{d}(\theta)]_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-jm\theta)$, $m = \dots, -1, 0, 1, \dots$, $\mathbf{d}(\theta)$ 具有 Vander monde 结构。

可以看出, \mathbf{G} 和 $\mathbf{d}(\theta)$ 都具有无穷多项, 这在实际应用中是不可行的。可以采用最小二乘方法, 通过将 $\mathbf{d}(\theta)$ 截断, 同时使得系统误差在允许接受的范围内, 进而求得有限项的 \mathbf{G} 和 $\mathbf{d}(\theta)$, 具体分析如下。

由此可以将流形分离用下面一个最小二乘问题来表述:

$$\mathbf{G} = \arg \min_{\mathbf{G}} \left\{ \sum_{t=1}^T \|\mathbf{a}(\theta_t) - \mathbf{G}\mathbf{d}(\theta_t)\|_F^2 \right\} \quad (6-4)$$

其中 \mathbf{G} 为 $N \times \tilde{M}$ 维矩阵, $\mathbf{a}(\theta_t)$ 是 $N \times 1$ 维导向矢量, $\mathbf{d}(\theta_t)$ 是 $\tilde{M} \times 1$ 维 Vander monde 矢量, \tilde{M} 为选定的模式数目, 即 $\mathbf{d}(\theta)$ 截断后的长度。 $\mathbf{d}(\theta_t)$ 满足:

$$\mathbf{d}(\theta_i) = \left[\exp\left(-j\frac{\tilde{M}-1}{2}\theta_i\right), \dots, \exp(-j\theta_i), 1, \exp(j\theta_i), \dots, \exp\left(j\frac{\tilde{M}-1}{2}\theta_i\right) \right]^T \quad (6-5)$$

为了解决上述优化问题，可以在 $[0, 2\pi)$ 中均匀选择 T 个测试角度（一般选择 $T \gg \tilde{M} > N$ ），得到 $N \times T$ 维导向矢量矩阵 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_T)]$ ，同时构造 $\tilde{M} \times T$ 维矩阵 $\mathbf{D} = [\mathbf{d}(\theta_1), \mathbf{d}(\theta_2), \dots, \mathbf{d}(\theta_T)]$ 。进而得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \arg \min_{\mathbf{G}} \left\{ \sum_{i=1}^T \|\mathbf{a}(\theta_i) - \mathbf{G}\mathbf{d}(\theta_i)\|_F^2 \right\} \\ &= \arg \min_{\mathbf{G}} \left\{ \|\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{D}\|_F^2 \right\} \\ &= \arg \min_{\mathbf{G}} \left\{ \text{tr}[(\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{D})^H (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{D})] \right\} \end{aligned} \quad (6-6)$$

在上式中，令 $\frac{\partial \left\{ \text{tr}[(\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{D})^H (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{D})] \right\}}{\partial \mathbf{G}} = 0$ ，可以得到 \mathbf{G} 的最小二乘估计：

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{A}\mathbf{D}^H (\mathbf{D}\mathbf{D}^H)^{-1} \quad (6-7)$$

获得 $\hat{\mathbf{G}}$ 、 \mathbf{D} 后，就可以利用 \mathbf{D} 的 Vander monde 结构结合 Root-MUSIC 方法进行快速 DOA 估计。

6.2.2 虚拟内插变换方法

虚拟内插变换方法在前面已经提及，虚拟阵列变换法的核心是寻找在某个角域 Θ_l 内满足 $\mathbf{B}_l^H \mathbf{a}(\theta) = \bar{\mathbf{a}}(\theta)$ ($\theta \in \Theta_l$) 的变换矩阵 \mathbf{B}_l ，其中 $\mathbf{a}(\theta)$ 和 $\bar{\mathbf{a}}(\theta)$ 分别为真实阵列和虚拟阵列的导向矢量，求解变换矩阵的主要步骤如下。

步骤 1：将阵列的观测区域划分为许多块，将第 l 个块对应的区间表示为 $[\theta_l^{(1)}, \theta_l^{(2)}]$ ；

步骤 2：取 $\Theta_l = [\theta_l^{(1)}, \theta_l^{(1)} + \Delta\theta, \theta_l^{(1)} + 2\Delta\theta, \dots, \theta_l^{(2)} - \Delta\theta, \theta_l^{(2)}]$ 为第 l 个块内测试角度集，用于计算内插矩阵；

步骤 3：计算第 l 个块内测试角度 Θ_l 的真实导向矢量 $\mathbf{A}_l = [\mathbf{a}(\theta_l^{(1)}), \mathbf{a}(\theta_l^{(1)} + \Delta\theta), \mathbf{a}(\theta_l^{(1)} + 2\Delta\theta), \dots, \mathbf{a}(\theta_l^{(2)} - \Delta\theta), \mathbf{a}(\theta_l^{(2)})]$ ；

步骤 4：确定虚拟阵元的个数和位置，计算第 l 个块内测试角度 Θ_l 的虚拟导向矢量 $\bar{\mathbf{A}}_l = [\bar{\mathbf{a}}(\theta_l^{(1)}), \bar{\mathbf{a}}(\theta_l^{(1)} + \Delta\theta), \bar{\mathbf{a}}(\theta_l^{(1)} + 2\Delta\theta), \dots, \bar{\mathbf{a}}(\theta_l^{(2)} - \Delta\theta), \bar{\mathbf{a}}(\theta_l^{(2)})]$ ；

步骤 5：求得矩阵 \mathbf{B}_l ，使得 $\mathbf{B}_l^H \mathbf{A}_l = \bar{\mathbf{A}}_l$ ，可以解得 $\mathbf{B}_l = (\mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^H)^{-1} \mathbf{A}_l \bar{\mathbf{A}}_l^H$ 。

由上可知，对于给定的阵列，变换矩阵序列 $\{\mathbf{B}_l\}$ 仅需计算一次，且可以离线

完成。若记真实阵列数据协方差矩阵为 $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}$ ，则虚拟阵列数据协方差矩阵为 $\bar{\mathbf{R}}_l' = \mathbf{B}_l^H\mathbf{R}\mathbf{B}_l = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_s\bar{\mathbf{A}}^H + \sigma^2\mathbf{B}_l^H\mathbf{B}_l$ 。由于 $\mathbf{B}_l^H\mathbf{B}_l \neq \mathbf{I}$ ，需要进行预白化处理，变换矩阵如式(6-8)：

$$\mathbf{T}_l = (\mathbf{B}_l^H\mathbf{B}_l)^{-1/2}\mathbf{B}_l^H \quad (6-8)$$

此时 $\mathbf{T}_l\mathbf{T}_l^H = \mathbf{I}$ 成立，虚拟阵列的数据协方差矩阵表示为 $\bar{\mathbf{R}}_l = \mathbf{T}_l\mathbf{R}\mathbf{T}_l^H = \bar{\mathbf{A}}'\mathbf{R}_s\bar{\mathbf{A}}'^H + \sigma^2\mathbf{I}$ 。若设原阵列噪声子空间为 \mathbf{U}_n ，则虚拟阵列噪声子空间 $\bar{\mathbf{U}}_n = \mathbf{T}_l\mathbf{U}_n$ 成立。容易看出， $\bar{\mathbf{A}}'(\theta)$ 已不具有 Vander monde 结构，然而，由于 $\mathbf{T}_l\mathbf{U}_n$ 与 $(\mathbf{B}_l^H\mathbf{B}_l)^{-1/2}\bar{\mathbf{A}}(\theta)$ 相互正交，且 $\bar{\mathbf{A}}(\theta)$ 具有 Vander monde 结构，由此仍然可以根据 Root-MUSIC 算法构造求根多项式，进而实现快速 DOA 估计。

6.3 半球阵列的两种内插方式

本节将虚拟阵列内插方法应用于半球共形阵列中，建立了半球阵到虚拟矩形阵和虚拟十字阵两种变换关系。

考虑如图 4.1 (a) 所示的半球阵列，其阵列结构的非均匀性导致接收数据为对空间数据的非等间隔采样，为了得到等间隔采样的数据，可以采用两种均匀阵列对原阵列进行虚拟内插变换。虚拟阵列的数据相当于借助原阵列得到的对空间数据的估计，这要求其阵列设计应与原阵列在结构上具有相似性，如位置应与原阵列接近，有效孔径应与原阵列近似相等。

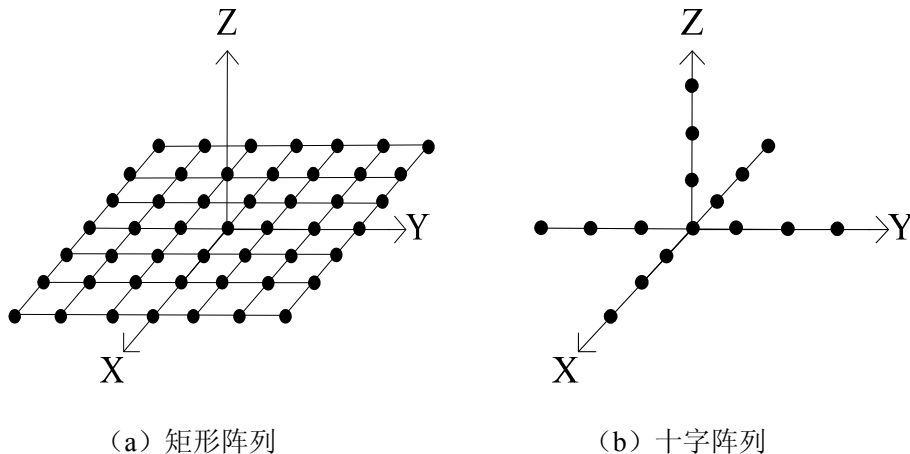


图 6.2 虚拟阵列模型

第 1 种方式采用矩形阵列（如图 6.2 (a)），此时虚拟阵列在 X、Y 轴上与原阵列等效孔径相等，但在 Z 轴方向有孔径损失。第 2 种方式采用十字阵列（如图 6.2 (b)），此时虚拟阵列仅分布于坐标轴上，与原阵列在 X、Y、Z 三轴上具有相同的等效孔径，这种内插方式不损失轴向孔径，同时结构较为简单。两种虚拟阵列的分布特点使得将其作为半球阵的内插阵列具有合理性。为了比较两种内插方

式的性能，下面分别从转换误差^[96]、孔径分布、运算复杂度三个方面对二者进行对比分析。

6.3.1 转换误差

转换误差的定义如下：

$$e(\theta, \varphi) = \frac{\|\mathbf{B}^H \mathbf{a}(\theta, \varphi) - \bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi)\|_F}{\|\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi)\|_F} \quad (6-9)$$

式中， $\mathbf{a}(\theta, \varphi)$ 、 $\bar{\mathbf{a}}(\theta, \varphi)$ 分别表示原阵列与虚拟阵列在 (θ, φ) 方向的导向矢量， \mathbf{B} 为转换矩阵。转换误差可以表征转换得到的虚拟阵列流形与理想的虚拟阵列流形的相似程度，转换误差越小，两者越接近。图 6.3 为两种虚拟阵列在不同角度的转换误差。由图可知，矩形阵列的转换误差受俯仰角影响较大，当俯仰角较小时其转换误差较小，随着俯仰角增大，转换误差逐渐变大。十字阵列转换误差在整个角度范围内保持较小的数值，同时其受俯仰角影响较小。

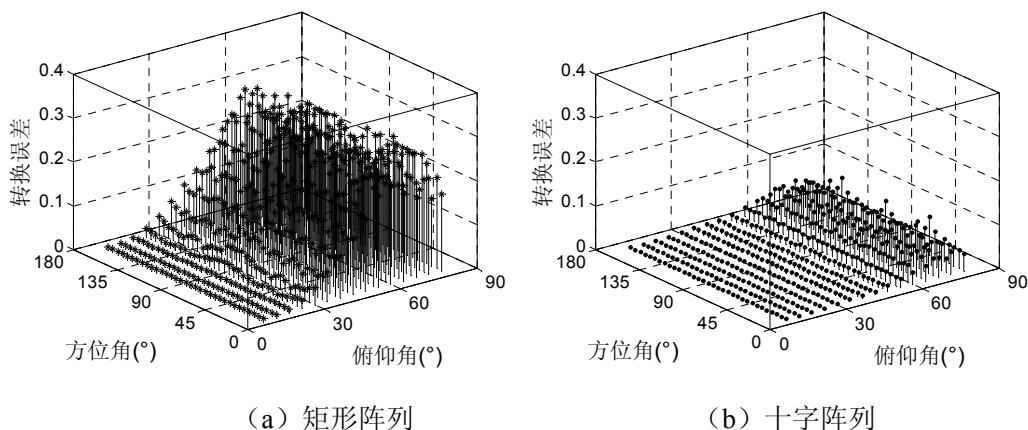


图 6.3 转换误差

6.3.2 等效孔径

在等效孔径方面，需要分别对 XOY 平面孔径和 Z 轴孔径进行对比分析。XOY 平面孔径定义为阵列在 XOY 平面上对信源方向的有效孔径，Z 轴孔径定义为阵列在 Z 轴方向上对信源方向的有效孔径。分别用 D_{XOY} 、 D_Z 表示 XOY 平面孔径和 Z 轴孔径，二者示意如图 6.4 所示。

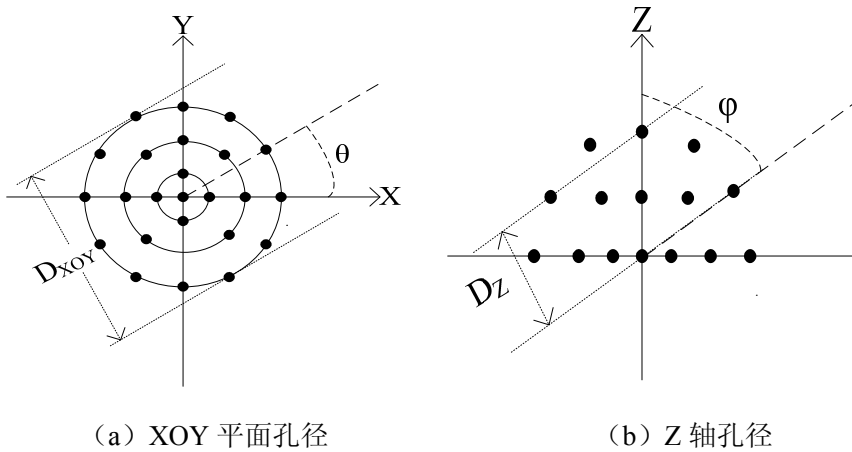


图 6.4 等效孔径

由阵列理论可知，阵列孔径越大，其分辨率越高，相应的 DOA 估计性能越好，同时主瓣波束越窄。结合 XOY 孔径和 Z 轴孔径的定义可知，二者可分别用来衡量阵列在方位维和俯仰维的 DOA 估计性能以及方位维和俯仰维的主瓣宽度，阵列最终的 DOA 估计性能受两种孔径综合影响。为了对比不同阵列在等效孔径方面的差异，图 6.5 给出了三种阵列的孔径随角度的变化曲线。可以看出，XOY 平面孔径方面，原半球阵列恒为常数，两种虚拟阵列随方位角增大而波动变化，当方位角为 45°或 135°时，虚拟矩形阵列的孔径达到最大值，虚拟十字阵列的孔径取得最小值。Z 轴孔径方面，虚拟矩形阵列 Z 轴孔径恒为零，虚拟十字阵列与原阵列在 Z 轴方向的分量相同，使得两者的孔径随俯仰角变化趋势一样，均随俯仰角增大而增大。

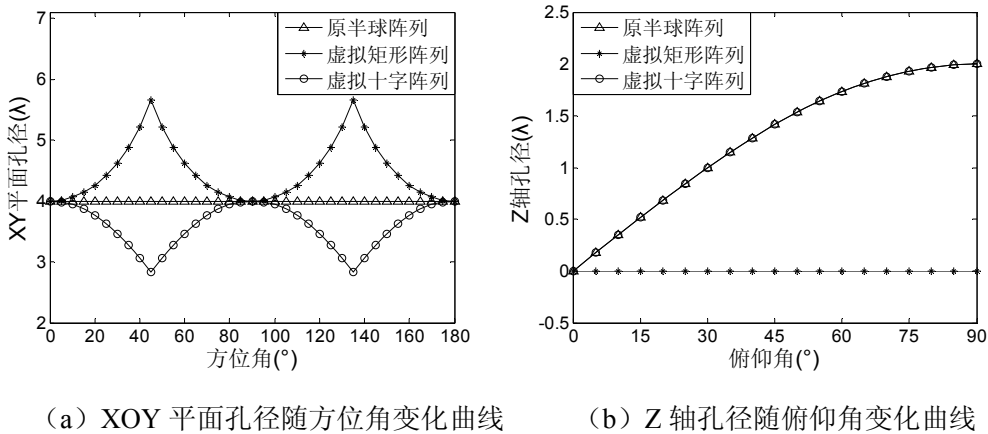


图 6.5 孔径对比

综上所述，利用虚拟阵列进行处理，最终 DOA 估计性能会受转换误差和孔径分布两种因素综合影响，可以预计：当俯仰角较大时，虽然十字阵在 XOY 平面的孔径较小，但它的 Z 轴孔径较大且转换误差小于矩形阵，DOA 估计性能应优于矩形阵；当俯仰角较小时，两种虚拟阵列的转换误差和 Z 轴孔径均相差不多，

但矩形阵在 XOY 平面孔径上要明显大于十字阵, 此时矩形阵的 DOA 估计性能应较优。此外, 在方位角接近 45° 或 135° 区域, 矩形阵的 XOY 平面孔径远大于十字阵, 对应的 DOA 估计性能应更优。

6.3.3 运算复杂度分析

设原半球阵列的阵元数为 N , 若采用 MUSIC 算法进行 2 维 DOA 估计, 其运算复杂度主要体现在特征值分解和谱峰搜索上。根据文献[57], 对维数为 $N \times N$ 的相关矩阵进行特征分解的运算复杂度为 $O[15(N-1)^3]$ 。假设 2 维谱峰搜索的总点数为 K , 则谱峰搜索的运算复杂度为 $O[K(N^2+N)]$ 。原阵列实现 MUSIC 算法的总的运算复杂度为 $O[15(N-1)^3] + O[K(N^2+N)]$ 。

利用虚拟阵列估计 DOA 的过程可由离线运算和在线运算两步组成。离线运算主要包括计算转换矩阵 \mathbf{B} 和 \mathbf{T} 。考虑 L 个角域, 则离线部分的运算复杂度为 $O[LN^3] + O[L\bar{N}^3]$ 。在线运算主要体现在 Root-MUSIC 算法上。对于 M 元等距线阵, 若采用 Root-MUSIC 进行 DOA 估计, 其运算复杂度为 $O[120(M-1)^3]$ 。这里设虚拟阵列在 X 轴、Y 轴上的阵元数为 $N_{x/y}$, 同时可得虚拟十字阵列 Z 轴上的阵元数 $N_z = (N_{x/y} + 1)/2$, 考虑到 L 个角域, 可知虚拟矩形阵列和虚拟十字阵列进行在线 DOA 估计时总的运算复杂度分别为 $O[240L(N_{x/y}-1)^3]$ 、 $O[255L(N_{x/y}-1)^3]$ 。由此看出, 通常情况下, 虚拟矩形阵列的离线计算量大于虚拟十字阵列, 但若只考虑在线 DOA 估计, 则虚拟矩形阵列的计算量小于虚拟十字阵列。虚拟矩形阵列以大的离线计算量为代价得到了相对较小的在线计算量。

由以上分析可知, 对于 3 维共形阵列, 在满足 $N \gg N_{x/y}$ 的条件下, 利用虚拟阵列实现在线 DOA 估计的运算量大大降低。

6.4 仿真实验

在仿真实验中, 采用图 4.1 (a) 示意的半球共形阵列, 虚拟阵列设置如图 6.2 所示。半球阵列由 5 个均匀分布的圆阵组合而成, 各环阵元数分别为 24、20、16、8、1, 环与环之间服从等弧度分布, 半球底面半径取 2λ 。虚拟矩形阵列由 81 个阵元构成, 组成 9×9 方阵, 阵元行列间距为 $\lambda/2$ 。虚拟十字阵列由 21 个阵元构成, 除坐标原点阵元外, 其余各阵元均匀分布于 x 轴、-x 轴、y 轴、-y 轴、z 轴上, 各轴向阵元数为 4, 间距为 $\lambda/2$ 。

在 DOA 估计方面, 对于矩形阵列, 利用其结构的特殊性, 在对“虚拟数据”

进行行列合成处理^[97]的基础上应用 2D Root-MUSIC^[98]算法, 即可得到信源的 2 维 DOA 估计。对于十字阵列, 可利用 XOY 面上的十字阵列估计信源的俯仰角和方位角, 利用 Z 轴上的等距线阵估计信源的俯仰角, 为了减小估计误差, 将两个俯仰角估计的均值作为最终的俯仰角估计值。

在自适应波束形成方面, 将线性约束最小方差 (LCMV)^[99]准则直接应用于虚拟阵列中, 得到虚拟阵列的权矢量形式为:

$$\bar{W}_{opt} = \bar{R}_x^{-1} \bar{C} (\bar{C}^H \bar{R}_x^{-1} \bar{C})^{-1} f \quad (6-10)$$

其中 \bar{R}_x 、 \bar{C} 分别表示虚拟阵列协方差矩阵和虚拟阵列的导向约束矩阵。

6.4.1 DOA 估计对比

实验 1: 在上述实验参数下, 分别借助虚拟矩形阵列和虚拟十字阵列进行 2 维 DOA 估计, 信噪比取 0dB。经过 2000 次独立的蒙特卡洛实验, 得到利用两种内插方式进行 DOA 估计的均方根误差对比结果, 如图 6.6 所示。其中“圆圈”表示十字阵列的均方根误差小于矩形阵列的均方根误差, “星号”与之相反。

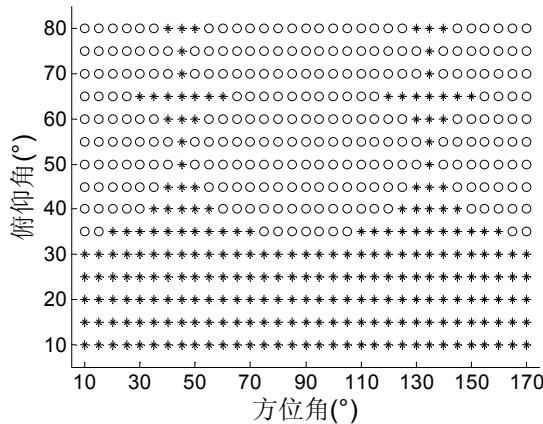


图 6.6 两种内插方式的 DOA 估计性能对比

可以看出, 两种内插方式的 DOA 估计性能受信源俯仰角的影响较大, 俯仰角较小时, 矩形阵内插的性能较优, 随着俯仰角的增加, 十字阵估计性能逐渐优于矩形阵。另外, 两者的性能对比结果关于 90° 方位角对称, 信源方位角靠近 45° (或 135°) 时, 矩形阵列的 DOA 估计性能较优, 与理论预测一致。

实验 2: 分别将信源方向固定为 $(\theta, \varphi) = (45^\circ, 30^\circ)$ 和 $(90^\circ, 50^\circ)$, 信噪比从 -15dB 增至 15dB, 经过 2000 次独立的蒙特卡洛实验, 得到这两个角度下利用两种虚拟内插方式进行 DOA 估计以及直接利用原阵列 MUSIC 算法进行 DOA 估计的性能变化对比曲线, 如图 6.7 所示。

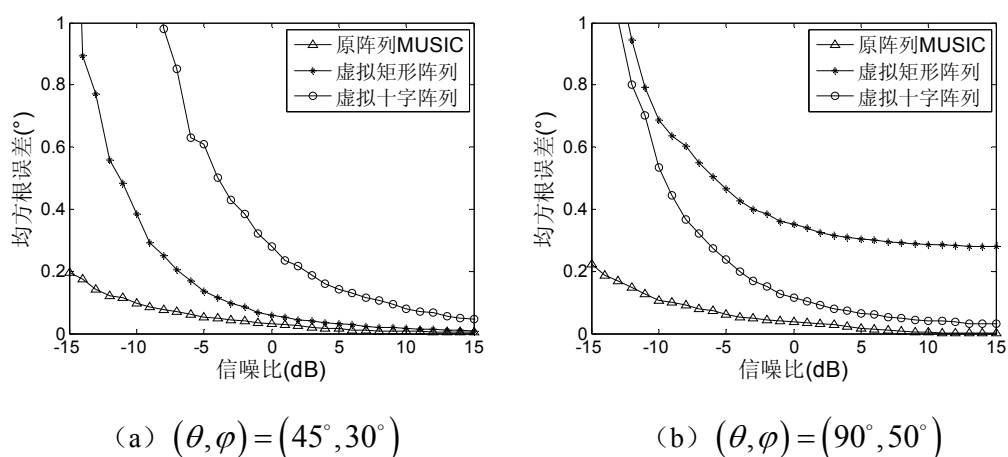


图 6.7 三种阵列 DOA 估计性能随信噪比变化对比曲线

可以看出，两种虚拟内插方式在 SNR 较小时 DOA 估计性能较差，随着 SNR 的增大，两者估计性能逐渐变优，虚拟十字阵列变化趋势明显，而虚拟矩形阵列变化趋势较为平坦。与原阵列 MUSIC 算法相比，虚拟阵列的 DOA 估计性能略差。

6.4.2 自适应波束形成对比

实验 1: 设来波方向 $(\theta, \varphi) = (120^\circ, 30^\circ)$ ，干扰方向 $(\theta, \varphi) = (30^\circ, 60^\circ)$ ，信噪比为 0 dB，干信比为 10 dB，快拍次数取为 1000，利用 LCMV 准则分别得到原阵列、虚拟矩形阵列、虚拟十字阵列的方向图，如图 6.8 所示。图 6.9 对比了 3 种阵列在主瓣方向的方位维方向图和俯仰维方向图，图 6.10 对比了 3 种阵列在干扰方向的方位维方向图和俯仰维方向图，表 6.1 为 3 个方向图在方位维和俯仰维的主瓣宽度对比。

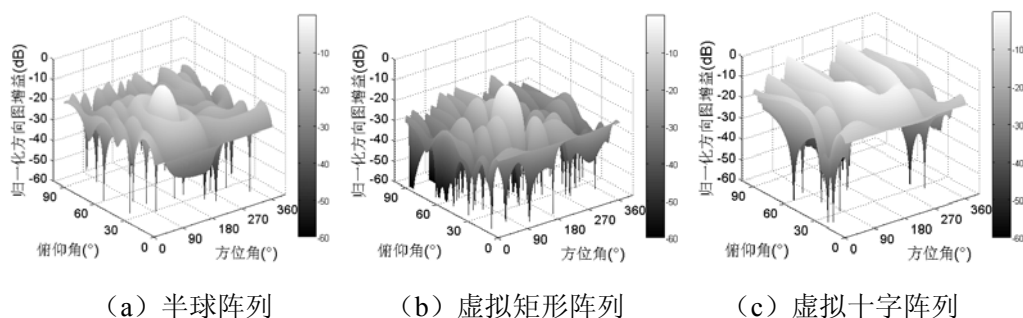


图 6.8 三维方向图

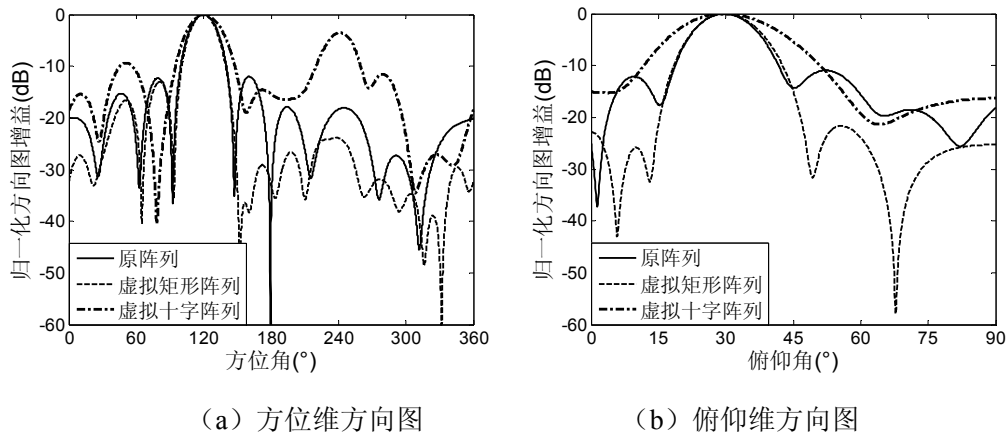


图 6.9 主瓣方向剖面图

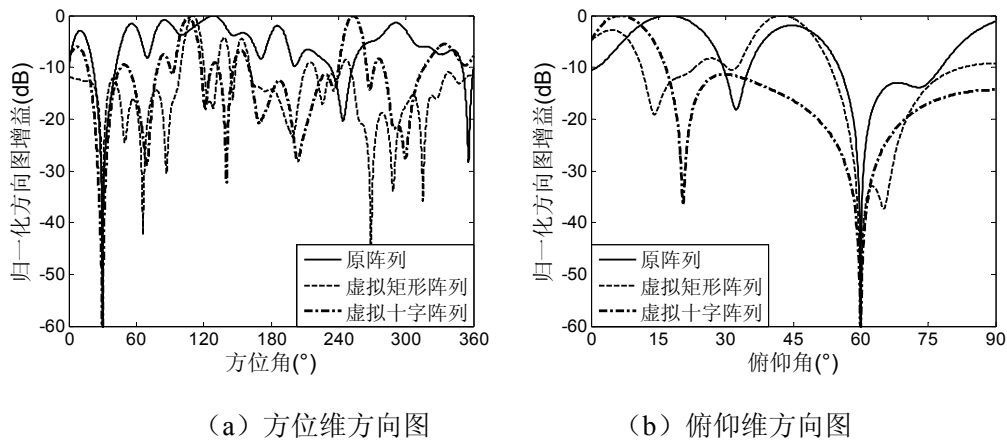


图 6.10 干扰方向剖面图

表 6.1 阵列主瓣宽度对比

	方位维主瓣宽度(°)	俯仰维主瓣宽度(°)
原阵列	24.4	13.4
虚拟矩形阵列	22.7	14
虚拟十字阵列	30.6	21.6

可以看出,两种虚拟阵列均可以在期望方向形成主瓣的同时对干扰进行抑制。在两维主瓣宽度上,虚拟矩形阵列在方位维的主瓣宽度比原阵列窄,俯仰维的主瓣宽度比原阵列宽,整体与原半球阵列接近。虚拟十字阵列在两维主瓣宽度上都宽于原阵列。干扰方向图上,具有较窄主瓣宽度的方向图其在干扰方向的凹口也较窄,即凹口相对宽度与主瓣相对宽度保持一致。另外,不难看出,阵列方向图宽度对比与各阵列孔径分布特点(图 6.5 所示)相一致。

实验 2: 将输入信噪比从 -20dB 增至 20dB,其余参数同实验 1。三种阵列构型方向图的输出信干噪比 (SINR) 随输入信噪比变化曲线如图 6.11 所示。

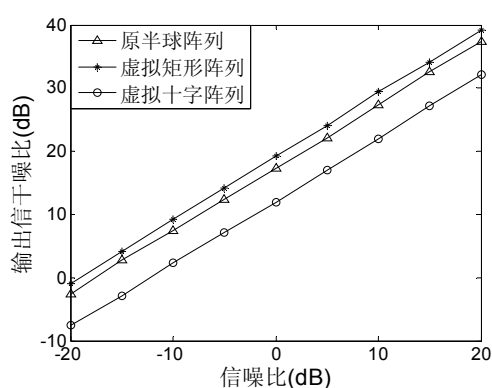


图 6.11 阵列输出信干噪比随输入信噪比变化曲线

可以看出，三种阵列输出 SINR 均随着输入信噪比的增大而增大。相同输入信噪比下，输出 SINR 由大到小对应的阵列依次为虚拟矩形阵列、原阵列、虚拟十字阵列。由此可知三种阵列按抗干扰能力强弱排布依次为：虚拟矩形阵列、原阵列、虚拟十字阵列。这是因为与原半球阵列相比，虚拟矩形阵列阵元数较多，增加了系统自由度，使得其在满足特定约束自由度的条件下拥有更多的自适应自由度来抑制干扰和噪声^[100]，所以输出 SINR 大于原阵列。同理，虚拟十字阵列与原阵列相比减少了系统自由度，其自适应自由度降低，相当于对原阵列进行降秩处理，此时的波束形成性能（即输出 SINR）显然会下降。

6.5 小结

本章首先介绍了共形阵列的快速 DOA 估计算法，然后将虚拟内插变换的思想应用于半球共形阵列中，分别建立了从半球共形阵列到矩形阵列和十字阵列两种变换关系，并利用虚拟阵列进行 DOA 估计、波束形成等阵列处理。本章对两种内插方式在 DOA 估计、波束形成、运算复杂度等方面进行了全面分析和仿真验证。

第七章 总结与展望

7.1 总结

共形阵列有着优越的结构特点和良好的测向性能，其基本不会对雷达载体的空气动力学性能产生影响，且具有体积小、重量轻、安装简便等优点，在现代战争背景下有着广泛的应用。论文研究了共形阵列的误差校正和快速 DOA 估计方法。在误差校正方面，提出了一种借助虚拟阵列来快速实现共形阵列幅相误差校正的新方法。另外针对圆台共形阵列，推导出了其互耦矩阵模型，并提出了两种基于圆台共形阵列的互耦误差自校正方法。在 DOA 估计方面，将虚拟内插变换方法应用到共形阵列上，并对半球共形阵列的两种内插方式进行了性能对比分析。主要工作可概括为：

(1) 建立了共形阵列接收数据模型，在此基础上利用坐标旋转实现了共形阵列导向矢量建模。

(2) 将虚拟内插变换方法引入到共形阵列的幅相误差校正中，所提算法使得校正时间缩短了两个数量级。

(3) 以互耦矩阵呈复共轭对称分布为前提，推导出了圆台共形阵列的互耦矩阵模型，并提出两种互耦误差校正方法。

(4) 将虚拟阵列内插方法应用于半球共形阵列的 DOA 估计中，建立了从半球阵到虚拟矩形阵和虚拟十字阵两种变换关系，并对两种方式的性能进行了分析对比和仿真验证。

7.2 工作展望

论文在共形阵列的 DOA 估计方面开展研究，具体来说，进行了共形阵列幅相误差校正、共形阵列互耦误差校正、共形阵列快速 DOA 估计算法等方面的研究，并取得了一些可以成果。但是，共形阵列方面的工作内容远不止于此，尚有许多问题亟待解决，为此，作者就目前所了解的情况，对共形阵列在误差校正及 DOA 估计方面进行下面一些工作的展望，仅供参考。

(1) 论文在某些模型方面的假设仅基于纯理论，使得构造的模型较为简单，而实际工程中情况复杂，实测数据与理论数据可能差异较大。如论文中假设半球共形阵列的耦合误差矩阵服从 Toeplitz 特性，而实际情况中耦合现象复杂多样，并不完全服从 Toeplitz 特性；在利用虚拟内插变换方法实现 DOA 估计时，我们假设共形阵列阵元具有全向特性，而在实际情况中，由于载体曲率的影响，各阵元方

向图会存在较大的差异。

(2) 论文提出的互耦误差校正方法只适用于某种特殊结构阵列,且假设各阵元之间的互耦系数具有对称性。而在实际应用中,阵列构型复杂多样,互耦系数之间的对称结构可能由于受到环境的影响而不再成立,这就使得互耦模型呈时变特性,因此研究不依赖于互耦矩阵特性以及互耦模型呈时变特性时的互耦校正方法具有重要的意义。

致谢

时光飞逝，转眼间短暂的攻读硕士学位的学习生活已经接近尾声。在我的硕士论文完稿之际，我谨向许多关心、帮助、支持过我的人表示诚挚的感谢！

首先，感谢我的导师杨志伟副教授，在硕士研究生的学习生活中，杨老师一直于百忙之中抽出时间对我的论文研究进行具体指导，不但为我指明了研究方向，而且在许多问题上以他敏锐的洞察力提出极富启发意义的意见和建议，在这些深刻而生动的启发指导下，我深深感受到导师对我倾注的一腔心血。杨老师渊博的知识、活跃的思维，以及对科学研究的热忱、对学生成长的关心，让我在求知过程中收获良多，成为我今后工作和学习的一笔宝贵财富。

感谢实验室廖桂生教授，廖老师渊博的知识和深厚的学术造诣令人敬仰，每周组织的学术讨论使我的研究工作受到很大的启发。廖老师宽广的胸怀和正直谦逊的为人态度也是我学习的榜样。

感谢电子所提供的良好的工作环境和一流的研究条件。感谢实验室李兰、詹志伟、白洁、张淑红、徐青、程荣刚等老师给予的帮助和支持。

感谢课题组的陶海红教授、李军副教授、曾操副教授和朱圣棋副教授，科研工作中与他们的交流、讨论使得我得益良多。感谢刘志凌、束宇翔、何嘉懿、杜文韬、宁波、许京伟等师兄师姐们，与他们的讨论和交流使我能够较快地进入课题；感谢孙冬暖、夏桂琴、武江涛、田静、郭佳佳、王昭、王威、胡柏林、巩继玲、伊孟磊、杨绪、李金强、何挺、夏艳杰等同学，与他们的交流讨论使得我们共同进步，与他们共同的工作和学习生活将是我永远的财富；感谢杨磊、纪文静、孙存光、辛志慧、吕利、陈茜茜、许华健等师弟师妹，希望他们能够认真学习，做好科研工作。

感谢我的哥哥张学攀在生活和学习上的关照，他剑走偏锋的思考方式和对各种软件的熟练运用都在科研上助我一臂之力。

最后，感谢我的父母，他们一直在背后默默的支持我，正是他们对我的无私关爱，以及对我持之以恒的鼓励和支持使我能够不断克服前进道路上的重重困难，一步一步地向前进步，他们始终是我前进的力量所在。

再次感谢所有曾与我同甘共苦、给我关怀、给我帮助的人们。

参考文献

- [1] Braaten B D, Roy S, Nariyal S, et al. A Self-Adapting Flexible (SELFLEX) Antenna Array for Changing Conformal Surface Applications[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2013, 61(2): 655-665.
- [2] Yu J C, Hang X, Da M, et al. Millimeter-Wave Shaped-Beam Substrate Integrated Conformal Array Antenna[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2013, 61(9): 4558-4566.
- [3] Zou L, Lasenby J, He Z. Polarisation diversity of conformal arrays based on geometric algebra via convex optimisation[J]. IET Radar, Sonar & Navigation. 2012, 6(6): 417-424.
- [4] Do-Hoon K. Quasi-Conformal Transformation Optics Lenses for Conformal Arrays[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. 2012, 11: 1125-1128.
- [5] Mailloux R J. Conformal Array Antenna Theory and Design[J]. IEEE Antennas and Propagation Magazine. 2007, 49(5): 126-127.
- [6] Barabell A. Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Boston, 1983: 336-339.
- [7] Roy R, Paulraj A, Kailath T. ESPRIT--A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. 1986, 34(5): 1340-1342.
- [8] Viberg M, Ottersten B, Kailath T. Detection and estimation in sensor arrays using weighted subspace fitting[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 1991, 39(11): 2436-2449.
- [9] Stoica P, Ottersten B, Viberg M, et al. Maximum likelihood array processing for stochastic coherent sources[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 1996, 44(1): 96-105.
- [10] Ziskind I, Wax M. Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. 1988, 36(10): 1553-1560.
- [11] 朱松. 共形天线的发展及其电子战应用[J]. 中国电子科学研究院学报. 2007, 2(6): 562-567.
- [12] Clark T, Jaska E. Million element ISIS array[C]. IEEE International Symposium on

Phased Array Systems and Technology (ARRAY), Waltham, MA, 2010: 29-36.

[13] Knott P. Antenna design and beamforming for a conformal antenna array demonstrator[C]. IEEE Aerospace Conference, Big Sky, MT, 2006: 1-7.

[14] Knott P. Faceted vs. smoothly curved antenna front-end for a conformal array radar demonstrator[C]. European Radar Conference, Paris, 2005: 193-196.

[15] Kim K, Sarkar T K, Wicks M C, et al. DOA estimation utilizing directive elements on a conformal surface[C]. Proceedings of the Radar Conference, Huntsville, AL, USA, 2003: 91-96.

[16] Caille G, Vourch E, Martin M J, et al. Conformal array antenna for observation platforms in low Earth orbit[J]. IEEE Antennas and Propagation Magazine. 2002, 44(3): 103-104.

[17] Wang J J H, Tillery J K, Bohannon K E, et al. Helmet-mounted smart array antenna[C]. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, Montreal, Quebec, Canada, 1997: 410-413.

[18] Friedlander B, Weiss A J. Eigenstructure methods for direction finding with sensor gain and phase uncertainties[C]. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, New York, 1988: 2681-2684.

[19] Weiss A J, Friedlander B. Array shape calibration using eigenstructure methods[C]. Twenty-Third Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 1989: 925-929.

[20] Friedlander B, Weiss A J. Direction finding in the presence of mutual coupling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1991, 39(3): 273-284.

[21] Soon V C, Tong L, Huang Y F, et al. A subspace method for estimating sensor gains and phases[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 1994, 42(4): 973-976.

[22] See C M S. Sensor array calibration in the presence of mutual coupling and unknown sensor gains and phases[J]. Electronics Letters. 1994, 30(5): 373-374.

[23] Goossens R, Rogier H. A Hybrid UCA-RARE/Root-MUSIC Approach for 2-D Direction of Arrival Estimation in Uniform Circular Arrays in the Presence of Mutual Coupling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2007, 55(3): 841-849.

[24] Rao B D, Hari K V S. Performance analysis of Root-Music[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. 1989, 37(12): 1939-1949.

[25] Zhongfu Y, Dai J, Xu X, et al. DOA Estimation for Uniform Linear Array with Mutual Coupling[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2009, 45(1): 280-288.

[26] Aifei L, Guisheng L, Cao Z, et al. An Eigenstructure Method for Estimating DOA

- and Sensor Gain-Phase Errors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 2011, 59(12): 5944-5956.
- [27] Shenghong C, Zhongfu Y, Dongyang X, et al. A Hadamard Product Based Method for DOA Estimation and Gain-Phase Error Calibration[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2013, 49(2): 1224-1233.
- [28] Min L, Luxi Y. Blind Calibration and DOA Estimation With Uniform Circular Arrays in the Presence of Mutual Coupling[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. 2006, 5(1): 315-318.
- [29] Liu C, Ye Z, Zhang Y. Autocalibration algorithm for mutual coupling of planar array[J]. Signal Processing. 2010, 90(3): 784-794.
- [30] Liang J, Zeng X, Wang W, et al. L-shaped array-based elevation and azimuth direction finding in the presence of mutual coupling[J]. Signal Processing. 2011, 91(5): 1319-1328.
- [31] Weiss A J, Friedlander B. Array shape calibration using sources in unknown locations-a maximum likelihood approach[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. 1989, 37(12): 1958-1966.
- [32] See C M S. Method for array calibration in high-resolution sensor array processing[J]. IEE Proceedings -Radar, Sonar and Navigation. 1995, 142(3): 90-96.
- [33] Boon C N, See C S. Sensor-array calibration using a maximum-likelihood approach[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1996, 44(6): 827-835.
- [34] See C M S, Boon-Kiat P. Parametric sensor array calibration using measured steering vectors of uncertain locations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 1999, 47(4): 1133-1137.
- [35] Wang D. Sensor Array Calibration in Presence of Mutual Coupling and Gain/Phase Errors by Combining the Spatial-Domain and Time-Domain Waveform Information of the Calibration Sources[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing. 2013, 32(3): 1257-1292.
- [36] Wang C, Cadzow J A. Direction-finding with sensor gain, phase and location uncertainty[C]. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Toronto, 1991: 1429-1432.
- [37] Ng B C, Wee S. Array shape calibration using sources in known locations[C]. Communications on the Move, Singapore, 1992: 836-840.
- [38] Li Q, Gan L, Ye Z. An overview of self-calibration in sensor array processing[C]. International Symposium on Antennas, Propagation and EM Theory, Beijing, China, 2003: 279-282.

- [39] Jansson M, Swindlehurst A L, Ottersten B. Weighted subspace fitting for general array error models[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 1998, 46(9): 2484-2498.
- [40] Viberg M, Swindlehurst A L. A Bayesian approach to auto-calibration for parametric array signal processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 1994, 42(12): 3495-3507.
- [41] Hong J S. Genetic approach to bearing estimation with sensor location uncertainties[J]. Electronics Letters. 1993, 29(23): 2013-2014.
- [42] Bin L, Guisheng L, Jun W. Array calibration with sensor position errors using particle swarm optimization algorithm[C]. IET International Radar Conference, Guillin, China, 2009: 1-3.
- [43] Bin Y, Chengyou Y, Ye H. Calibration Method for Mutual Coupling Between Elements Based on Parallel Genetic Algorithm[C]. The Sixth World Congress on Intelligent Control and Automation, Dalian, 2006: 3490-3493.
- [44] 徐青, 陶海红, 廖桂生. 基于GA的阵列幅相误差校正新方法[J]. 系统工程与电子技术. 2006, 28(5): 654-657.
- [45] Weiss A J, Friedlander B. 'Almost blind' signal estimation using second-order moments[J]. IEE Proceedings -Radar, Sonar and Navigation. 1995, 142(5): 213-217.
- [46] Weiss A J, Friedlander B. DOA and steering vector estimation using a partially calibrated array[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1996, 32(3): 1047-1057.
- [47] Yih-Min C, Ju-Hong L, Yeh C C. Two-dimensional angle-of-arrival estimation for uniform planar arrays with sensor position errors[J]. IEE Proceedings F Radar and Signal Processing. 1993, 140(1): 37-42.
- [48] Cao S, Ye Z, Hu N, et al. DOA estimation based on fourth-order cumulants in the presence of sensor gain-phase errors[J]. Signal Processing. 2013, 93(9): 2581-2585.
- [49] Henault S, Podilchak S K, Mikki S M, et al. A Methodology for Mutual Coupling Estimation and Compensation in Antennas[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2013, 61(3): 1119-1131.
- [50] Wang B, Wang Y, Chen H. Array calibration of angularly dependent gain and phase uncertainties with instrumental sensors[C]. IEEE International Symposium on Phased Array Systems and Technology, 2003: 182-186.
- [51] Wang B, Guo Y. Mutual Coupling Auto-Calibration of Conformal Array Antenna with Instrumental Sensors Method[C]. International Workshop on Antenna Technology: Small Antennas and Novel Metamaterials, Chiba, 2008: 406-409.
- [52] 王布宏, 侯青松, 郭英, 等. 共形阵列天线互耦校正的辅助阵元法[J]. 电子学

- 报. 2009, 37(6): 1283-1288.
- [53] 王鼎, 吴瑛. 阵元位置误差自校正的累量域辅助阵元法[J]. 系统工程与电子技术. 2010, 32(7): 1357-1364.
- [54] 杨志伟, 廖桂生. 基于最小二乘的阵元位置误差校正及性能分析[J]. 系统工程与电子技术. 2007, 29(2): 167-169.
- [55] 侯青松, 郭英, 王布宏, 等. 共形阵列天线振动条件下稳健的DOA估计及位置误差校正[J]. 信号处理. 2010, 26(11): 1756-1760.
- [56] Friedlander B. The root-MUSIC algorithm for direction finding with interpolated arrays[J]. *Signal Processing*. 1993, 30(1): 15-29.
- [57] Weiss A J, Gavish M. Direction finding using ESPRIT with interpolated arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1991, 39(6): 1473-1478.
- [58] Weiss A J, Friedlander B. Performance analysis of spatial smoothing with interpolated arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1993, 41(5): 1881-1892.
- [59] Schmidt R O. Multilinear array manifold interpolation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1992, 40(4): 857-866.
- [60] Doron M A, Doron E. Wavefield modeling and array processing .II. Algorithms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1994, 42(10): 2560-2570.
- [61] Belloni F, Richter A, Koivunen V. DoA Estimation Via Manifold Separation for Arbitrary Array Structures[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2007, 55(10): 4800-4810.
- [62] Costa M, Richter A, Koivunen V. Unified Array Manifold Decomposition Based on Spherical Harmonics and 2-D Fourier Basis[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2010, 58(9): 4634-4645.
- [63] Costa M, Koivunen V, Richter A. Low complexity azimuth and elevation estimation for arbitrary array configurations[C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2009: 2185-2188.
- [64] Costa M, Richter A, Koivunen V. DoA and Polarization Estimation for Arbitrary Array Configurations[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2012, 60(5): 2330-2343.
- [65] Rubsamen M, Gershman A B. Direction-of-Arrival Estimation for Nonuniform Sensor Arrays: From Manifold Separation to Fourier Domain MUSIC Methods[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2009, 57(2): 588-599.
- [66] Zhuang J, Li W, Manikas A. Fast root-MUSIC for arbitrary arrays[J]. *Electronics Letters*. 2010, 46(2): 174-176.

- [67] Griffiths H D, Eiges R. Sectoral phase modes from circular antenna arrays[J]. Electronics Letters. 1992, 28(17): 1581-1582.
- [68] Zoltowski M D, Haardt M, Mathews C P. Closed-form 2-D angle estimation with rectangular arrays in element space or beamspace via unitary ESPRIT[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 1996, 44(2): 316-328.
- [69] Mathews C P, Zoltowski M D. Eigenstructure techniques for 2-D angle estimation with uniform circular arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 1994, 42(9): 2395-2407.
- [70] Mathews C P, Zoltowski M D. Direction finding with circular arrays via phase mode excitation and Root-MUSIC[C]. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, Chicago, IL, USA, 1992: 1019-1022.
- [71] Zoltowski M D, Mathews C P. Direction finding with uniform circular arrays via phase mode excitation and beamspace root-MUSIC[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, San Francisco, CA, 1992: 245-248.
- [72] 齐子森, 郭英, 王布宏, 等. 锥面共形阵列天线相干信源盲极化DOA估计算法[J]. 系统工程与电子技术. 2011, 33(6): 1226-1230.
- [73] 齐子森, 郭英, 姬伟峰, 等. 锥面共形阵列天线盲极化DOA估计算法[J]. 电子学报. 2009, 37(9): 1919-1925.
- [74] Reed I S, Mallett J D, Brennan L E. Rapid Convergence Rate in Adaptive Arrays[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1974, AES-10(6): 853-863.
- [75] Brennan L E, Reed I S. Theory of Adaptive Radar[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1973, AES-9(2): 237-252.
- [76] Zatman M. Circular array STAP[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2000, 36(2): 510-517.
- [77] Hersey R K, Melvin W L, McClellan J H, et al. Adaptive ground clutter suppression for conformal array radar systems[J]. IET Radar, Sonar & Navigation. 2009, 3(4): 357-372.
- [78] Hersey R K. Adaptive detection and estimation using a conformal array antenna[D]. Atlanta: Georgia Institute of Technology, 2004.
- [79] Ries P, Lapierre F D, Lesturgie M, et al. Handling partially calibrated conformal antenna arrays in range-dependence compensation for airborne bistatic space-time adaptive processing radar[J]. IET Radar, Sonar & Navigation. 2009, 3(4): 373-383.
- [80] Lapierre F D, Ries P, Verly J G. Foundation for mitigating range dependence in radar space-time adaptive processing[J]. IET Radar, Sonar & Navigation. 2009, 3(1):

18-29.

- [81] Ries P, Neyt X, Lapierre F D, et al. Fundamentals of spatial and Doppler frequencies in radar STAP[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2008, 44(3): 1118-1135.
- [82] 段克清, 谢文冲, 王永良. 共形阵机载雷达杂波非平稳特性及抑制方法研究[J]. 中国科学: 信息科学. 2011, 41(12): 1507-1516.
- [83] Zhao F, Xiao K, Qi H, et al. Preconditioned alternate projections method to synthesise conformal array[J]. Electronics Letters. 2011, 47(13): 735-736.
- [84] Yang K, Zhao Z, Ouyang J, et al. Optimisation method on conformal array element positions for low sidelobe pattern synthesis[J]. IET Microwaves, Antennas & Propagation. 2012, 6(6): 646-652.
- [85] Bai Y Y, Xiao S, Liu C, et al. A Hybrid IWO/PSO Algorithm for Pattern Synthesis of Conformal Phased Arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2013, 61(4): 2328-2332.
- [86] Mianquan L, Xuesong W, Jian D, et al. Optimal Difference Pattern Synthesis With Polarization Control for Arbitrary Arrays[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. 2012, 11: 1358-1361.
- [87] Zou L, Lasenby J, He Z. Beamforming with distortionless co-polarisation for conformal arrays based on geometric algebra[J]. IET Radar, Sonar & Navigation. 2011, 5(8): 842-853.
- [88] Qi Z S, Guo Y, Wang B H. Blind direction-of-arrival estimation algorithm for conformal array antenna with respect to polarisation diversity[J]. IET Microwaves, Antennas & Propagation. 2011, 5(4): 433-442.
- [89] 王布宏, 郭英, 王永良, 等. 共形天线阵列流形的建模方法[J]. 电子学报. 2009, 37(3): 481-484.
- [90] 张学敬, 杨志伟, 廖桂生. 共形阵列幅相误差校正快速算法[J]. 电子与信息学报. (已录用).
- [91] 梁昌洪, 李龙, 史小卫. 非互易网络的无耗约束条件[J]. 电子与信息学报. 2003, 25(9): 1261-1267.
- [92] Carlin H J. On the Physical Realizability of Linear Non-Reciprocal Networks[J]. Proceedings of the IRE. 1955, 43(5): 608-616.
- [93] Yantao Y, Hon T H. Design of a Mutual Coupling Compensation Network for a Small Receiving Monopole Array[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2011, 59(9): 2241-2245.
- [94] 张学敬, 杨志伟, 廖桂生, 等. 存在互耦误差时的圆台共形阵列DOA估计[J]. 中

国科学: 信息科学. (已录用).

[95] Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis[J]. Proceedings of the IEEE. 1969, 57(8): 1408-1418.

[96] 王永良. 空间谱估计理论与算法[M]. 清华大学出版社, 2004.

[97] Yih-Min C. On spatial smoothing for two-dimensional direction-of-arrival estimation of coherent signals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing. 1997, 45(7): 1689-1696.

[98] Wong K T, Zoltowski M D. Source localization by 2-D root-MUSIC with “scalar triads” of velocity-hydrophones[C]. IEEE 39th Midwest symposium on Circuits and Systems, 1996: 677-680.

[99] Frost O L I. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing[J]. Proceedings of the IEEE. 1972, 60(8): 926-935.

[100] 张学敬, 杨志伟, 廖桂生. 半球共形阵列的两种虚拟变换方式性能对比[J]. 西安电子科技大学学报, 2014, 41(3):37-46.

作者在读期间的研究成果

在硕士研究生期间取得的研究成果如下：

一、发表论文情况

- [1] 张学敬, 杨志伟, 廖桂生, 等. 存在互耦误差时的圆台共形阵列DOA估计[J]. 中国科学: 信息科学, 已录用
- [2] 张学敬, 杨志伟, 廖桂生. 共形阵列幅相误差校正快速算法[J]. 电子与信息学报, 已录用
- [3] 张学敬, 杨志伟, 廖桂生. 半球共形阵列的两种虚拟变换方式性能对比[J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2014, 41(3):37-46.已录用
- [4] 张学敬, 杨志伟, 廖桂生, 等. 共形阵列幅相误差校正快速算法[C]. 雷达信号处理国防科技重点实验室2013年度研究生学术年会三等奖
- [5] 张学攀, 张学敬, 廖桂生. 存在大信噪比和估计误差的改进LCMV准则[C]. 2012年“多维信号处理技术”全国博士生学术论坛论文集, 2012, 296-306

二、申请专利情况

- [1] 杨志伟, 张学敬, 廖桂生, 等. 共形阵列雷达幅相误差校正快速实现方法, 受理号: 201310279489.6

三、参与科研项目

- [1] xxx 雷达实时动态信息获取技术, 参与 SAR-GMTI 系统误差校正子函数编写
- [2] 提高微波遥感卫星成像质量方案设计, 参与SAR干扰与抗干扰效能评估

附录 A

设 \mathbf{D} 为 $N \times N$ 维循环对称 Toeplitz 矩阵, 定义与 \mathbf{D} 对应的矩阵 \mathbf{D}_{up} , 使其满足:

$$(\mathbf{D}_{up})_{ij} = \begin{cases} (\mathbf{D})_{ij} & j \geq i \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

此时矩阵 \mathbf{D}_{up} 为上三角矩阵, 且非零元素满足循环 Toeplitz 特性, 称 \mathbf{D}_{up} 为循环上三角 Toeplitz 矩阵。设循环向量 \mathbf{d}_{up} 满足 $(\mathbf{d}_{up})_i = (\mathbf{D}_{up})_{1,i}$, $i=1,2,\dots,L$, L 为循环对称 Toeplitz 矩阵 \mathbf{D} 的自由度。

当 N 为偶数时, \mathbf{D}_{up} 可以表示为:

$$\mathbf{D}_{up} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_{L-1} & d_L & d_{L-1} & \cdots & d_2 \\ & d_1 & \cdots & d_{L-2} & d_{L-1} & d_L & \cdots & d_3 \\ & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_L \\ & & & & d_1 & d_2 & \cdots & d_{L-1} \\ & & & & & d_1 & \cdots & d_{L-2} \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & d_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

此时 $L = N/2 + 1$, 则对于任意一个 $N \times 1$ 维的复向量 \mathbf{X} , 满足:

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_L, \dots, X_N]^T \quad (\text{A-3})$$

有下面等式成立:

$$\mathbf{D}_{up} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_{L-1} & d_L & d_{L-1} & \cdots & d_2 \\ & d_1 & \cdots & d_{L-2} & d_{L-1} & d_L & \cdots & d_3 \\ & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_L \\ & & & & d_1 & d_2 & \cdots & d_{L-1} \\ & & & & & d_1 & \cdots & d_{L-2} \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_L \\ X_{L+1} \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \quad (\text{A-4})$$

$$= \mathbf{T}_{up,even} [\mathbf{X}] \mathbf{d}_{up}$$

其中 $\mathbf{T}_{up,even} [\mathbf{X}]$ 满足:

$$\mathbf{T}_{up,even}[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} X_1 & (X_2 + X_{2L-2}) & \cdots & (X_{L-1} + X_{L+1}) & X_L \\ X_2 & X_3 & \cdots & (X_L + X_{L+2}) & X_{L+1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ X_{L-2} & X_{L-1} & \cdots & (X_{2L-4} + X_{2L-2}) & X_{2L-3} \\ X_{L-1} & X_L & \cdots & X_{2L-3} & X_{2L-2} \\ X_L & X_{L+1} & \cdots & X_{2L-2} & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ X_{2L-3} & X_{2L-2} & & & \\ X_{2L-2} & & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A-5})$$

当 N 为奇数时, \mathbf{D}_{up} 可以表示为:

$$\mathbf{D}_{up} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_{L-1} & d_L & d_L & d_{L-1} & \cdots & d_2 \\ & d_1 & \cdots & d_{L-2} & d_{L-1} & d_L & d_L & \cdots & d_3 \\ & & \ddots & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots & d_L \\ & & & & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_L \\ & & & & & d_1 & d_2 & \cdots & d_{L-1} \\ & & & & & & d_1 & \cdots & d_{L-2} \\ & & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & & d_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-6})$$

此时 $L = (N+1)/2$, 则对于任意一个 $N \times 1$ 维的复向量 \mathbf{X} , 满足:

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_L, \cdots, X_N]^T \quad (\text{A-7})$$

有下面等式成立:

$$\mathbf{D}_{up} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_{L-1} & d_L & d_L & d_{L-1} & \cdots & d_2 \\ & d_1 & \cdots & d_{L-2} & d_{L-1} & d_L & d_L & \cdots & d_3 \\ & & \ddots & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots & d_L \\ & & & & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_L \\ & & & & & d_1 & d_2 & \cdots & d_{L-1} \\ & & & & & & d_1 & \cdots & d_{L-2} \\ & & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_L \\ X_{L+1} \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \quad (\text{A-8})$$

$$= \mathbf{T}_{up,odd}[\mathbf{X}] \mathbf{d}_{up}$$

其中 $\mathbf{T}_{up,odd}[\mathbf{X}]$ 满足:

$$\mathbf{T}_{up,odd}[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} X_1 & (X_2 + X_{2L-1}) & (X_3 + X_{2L-2}) & \cdots & (X_L + X_{L+1}) \\ X_2 & X_3 & (X_4 + X_{2L-1}) & \cdots & (X_{L+1} + X_{L+2}) \\ \vdots & & & \vdots & \\ X_{L-1} & X_L & X_{L+1} & \cdots & (X_{2L-2} + X_{2L-1}) \\ X_L & X_{L+1} & X_{L+2} & \cdots & X_{2L-1} \\ X_{L+1} & X_{L+2} & X_{L+3} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ X_{2L-2} & X_{2L-1} & & & \\ X_{2L-1} & & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A-9})$$

综上所述可以归纳出，对于任意 $N \times N$ 维的循环上三角 Toeplitz 矩阵和任意一个 $N \times 1$ 维的复向量 \mathbf{X} ，有 $\mathbf{D}_{up}\mathbf{X} = \mathbf{T}_{up}[\mathbf{X}]\mathbf{d}_{up}$ 成立， $\mathbf{T}_{up}[\mathbf{X}]$ 是一个 $N \times L$ 维的变换矩阵，其构造方式由下面方式得到：

$$\mathbf{T}_{up}[\mathbf{X}] = \mathbf{T}_{up1} + \mathbf{T}_{up2} \quad (\text{A-10})$$

\mathbf{T}_{up1} 、 \mathbf{T}_{up2} 分别满足：

$$[\mathbf{T}_{up1}]_{i,j} = \begin{cases} X_{i+j-1} & i+j \leq N+1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (\text{A-11})$$

$$[\mathbf{T}_{up2}]_{i,j} = \begin{cases} X_{N+1+i-j} & \begin{cases} j \geq i+1, j < L, N \text{ 为偶数} \\ j \geq i+1, N \text{ 为奇数} \end{cases} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (\text{A-12})$$

